

## 第9回数理解析I演習 (2010年12月10日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[47] 次の函数の原点での特異点を分類せよ。極または零点の場合はその位数も求めよ。

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{z^4 + z^2 + 3z + 1}{z^5 + z^4} & 2. \frac{\sin z}{z} & 3. \frac{z}{e^z - 1} \\ 4. \sin\left(\frac{1}{z}\right) & 5. \frac{\tan z}{\log(1+z)} & 6. \frac{\cos z - 1 + z^2/2}{z^4} \end{array}$$

[48]  $1/\sin^2 z$  の  $z=0$  でのローラン展開

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{j=-2}^{\infty} a_j z^j$$

の係数  $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1$  を求めよ。

[49] 関数  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が単射であれば  $f(z) = az + b$  ( $a, b \in \mathbb{C}$  は定数) であることを示せ。  
ヒント:  $f(1/z)$  の  $0$  での特異点を調べよ。

[50]  $\mathbb{C}$  上の正則関数  $f(z)$  がすべての整数  $n$  にたいして  $f(n) = n^2$  を満たすとする。このとき  $f(z) = z^2$  が成り立つか? さらに  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$  を仮定するとどうなるか?

[51]  $F(z)$  を  $\mathbb{C}$  上の正則関数で周期  $2\pi$  をもつ (すなわち  $f(z+2\pi) = f(z)$  が成り立つ) とする。次の間に答えよ。

(1)  $z \neq 0$  のとき  $G(z) = F\left(\frac{\log z}{i}\right)$  と定義する。  $\log$  の定義の仕方は一通りには決まらないが、 $G$  は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  上の正則関数を定めることを示せ。

(2)  $F$  は次の形の展開式を持つことを示せ。  $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{nz}$

演習問題は <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/> からダウンロードできます。講義メモも載せています。