第 8 回数理解析 I 演習 (2010 年 12 月 3 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[41] (Morera の定理) f を複素領域 D 上の連続関数とする。D 内の任意の閉三角形 T に対して

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

が成り立てば f は正則であることを示せ。

[42] $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ がある定数 M と自然数 n に対して

$$|f(z)| < M(|z|+1)^n$$

を満たせば $f(z)$ は n 次以下の多項式であることを示せ。（ヒント：Cauchy の評価の証明を見よ）

[43] $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ が負の実数値をとらないとする。このとき $f(z)$ は定数であることを示せ。(ヒント：リュービルの定理に帰着させる)

[44] 領域 D に含まれる閉円板 $[\Delta]$ を考える。D 上の正則関数列 $\{f_k(z)\}$ が $\partial\Delta$ 上である連続関数に一様収束しているとする。このとき、Δ で正則なある関数 $f(z)$ が存在して $f_k(z)$ は $f(z)$ に Δ 上で広義一様収束することを示せ。

[45] $f(z)$ を円板 $\Delta = \{|z| < 1\}$ 上の有界正則関数とする。$0 < r < 1$ のとき

$$2f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta) - f(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta$$

を示せ。$f(\Delta)$ の直径を $d = \sup\{|z-w| : z, w \in f(\Delta)\}$ とするとき

$$2|f'(0)| \le d$$

を示せ。

[46] $\sqrt{1-z^2}$ は $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ 上の正則関数を定義することを示せ。
　γ を $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ 内の閉曲線とするとき

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

はどのような値をとるか？

演習問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます．講義メモも載せています．