第 7 回数理解析 I 演習 (2010 年 11 月 26 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[**37**] $\mathbb{C}$ 内の 2 つの領域 $\Omega_1 = \{|z| < 2\}, \Omega_2 = \{|z| > 1\}$ を考える。このとき $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 上の正則関数 f は Ω_j 上の正則関数 f_j $(j = 1, 2)$ を用いて $f = f_1 + f_2$ のように表されることを示せ。

ヒント： $1 + \epsilon < |z| < 2 - \epsilon$ で Cauchy の積分表示を行う.

[**38**] (a)

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$$

を積分することにより $\arctan z$ の $z = 0$ におけるテーラー展開を導け．さらに，その収束半径をもとめよ.

(b) $\sin z$ と $\cos z$ のテーラー展開を $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ に代入することにより $\tan z$ の $z = 0$ におけるテーラー展開を z^5 まで求めよ．さらに，このテーラー級数の収束半径をもとめよ.

[**39**] $\log(1 + z + z^2)$ の $z = 0$ におけるテーラー展開と，その収束半径をもとめよ.

ヒント：$z^3 - 1$ の因数分解を使うと計算が簡単になる.

[**40**] (a) 級数

$$g(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}z + \cdots$$

の収束半径をもとめよ.

(b) $g'(z)$ をもとめよ.

(c) 収束円の内部で $\exp(g(z)) = 1 + z$ が成り立つことを示せ.

演習問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます．講義メモも載せています.