第2回数理解析 I 演習 (2010年10月15日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[7] $z = x + iy$ とおくとき次の関数は正則か?

(a) $x^2 + iy$

(b) $(x^2 - y^2 + 3x) + i(2xy + 3y)$

[8] 複素数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ と実2次元数ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を同一視する．このとき線形写像

$$f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を $\mathbb{C}$ 上の関数としてみる．このとき次は同値であることを示せ：

(a) f は正則

(b) f は向きを保つ相似変換である

(c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $AJ = JA$.

[9] 複素数の極表示 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を考える．C^1 級関数 $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ にたいして

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \iff \left(\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

[10] $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ において極表示 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $(r,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi, \pi)$ を用いて複素変数の対数関数を

$$\log z = \log r + i\theta.$$

で定義する．$\log z$ は正則であることを示せ．

[11] $U, V \subset \mathbb{C}$ を開集合，$f\colon U \to V$ と $g\colon V \to \mathbb{C}$ が全微分可能であれば $h = g \circ f$ は

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$$

を満たすことを示せ．

[12] $f(z)$ が正則であれば $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ も正則であることを示せ．

演習問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます．講義メモも載せています．