第 11 回数理解析 I 演習 (2011 年 1 月 21 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[57] 複素積分を用いて次の定積分を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

[58] 次を示せ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx = \pi e^{-a}, \qquad a > 0.$$

[59] 次を示せ：

$$\int_0^1 \log(\sin \pi x) dx = -\log 2.$$

ヒント: $D = \{x + iy : x \in (0,1), y > 0\}$ の境界での積分を考える.

[60] (a) $R, \epsilon > 0$ に対して領域 $D = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 1/R < r < R, \epsilon < \theta < 2\pi - \epsilon\}$ を考える。D が $z^3 + 1 = 0$ の 3 つの解を含むとき

$$\int_{\partial D} \frac{\log z}{z^3+1} dz$$

を求めよ。

(b) 上の積分をもちいて

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

を示せ。

[61] (a) 区間 $[a,b]$ に対して

$$\int_a^b \frac{dx}{x-z} = \log\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

を示せ。ここで $\log z$ は $|\mathrm{Im} \log(z)| < \pi$ を満たすものとする。

(b) 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in (-\epsilon, 1+\epsilon), |y| < \epsilon\}$ をおけば

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = -\int_{\partial D} \frac{1}{z^3+1} \log\left(\frac{z-1}{z}\right) \frac{dz}{2\pi i}$$

(c) $\Delta(0,R) \setminus D$ において留数定理を用いて $R \to \infty$ とすることにより

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \sum_{z \in \mathbb{C}} \mathrm{Res}_z \frac{1}{z^3+1} \log\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

(d) 上式の右辺を求めよ。

演習問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます．講義メモも載せています．