$\boxed{\text{14th Jan}}$ $a \in \mathbb{C}$

$r < |a - z| < R$ 上の正則関数 f は、

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (r < |z-a| < R)$$

という展開を持つ。（広義一様収束）

<u>Proof</u> $r < {}^\forall r' < {}^\forall R' < R$ をとると、$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ は、$r' \leq |z-a| \leq R'$ で一様収束である事を示した。

あとは、a_n が、r', R' に依らない定数である事を示せば良い。

$r' < s < R'$ をとると、

$|z-a| = s$ 上で一様収束

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=s} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n-1} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overbrace{\int_{|z-a|=s} (z-a)^{k-n-1} dz}^{k \neq n \text{ で } 0}$$

$$= a_n$$

$r < s < s' < R$ とすると、

$\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ は、$s \leq |a-z| \leq s'$ で正則なので、Cauchy の積分定理より、

$$\int_{|z-a|=s} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \int_{|z-a|=s'} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

よって、a_n は s に依らない定数

■

<u>留数</u> $f : \Delta^\times(a, r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r \} \to \mathbb{C}$ ：正則

f の $z = a$ での Laurent 展開の $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ の

係数 a_{-1} を f の a での <u>留数</u> という。 $a_{-1} = \mathrm{Res}_a f$ と書く。
Residue

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < r' < r \text{ に対し} \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z-a|=r'} f(z) dz = \mathrm{Res}_a f \end{array}}$$

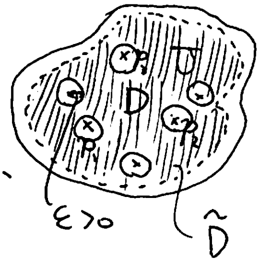
（さっきの式の $n = -1$ を代入した。）

留数定理

$D\subset\mathbb{C}$ を Green の定理が使える領域とする。
(eg. ∂D が区分的 C^1 級)

$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n \in D$,

U を $[D]$ を含む開集合とする。



$f: U\setminus\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}\longrightarrow\mathbb{C}$ を正則関数とする時、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{P_j} f \quad \left(= \sum_{z\in D}\mathrm{Res}_z f\right)$$

↑ 正則な点では Res は 0 だから。

Proof

$\varepsilon>0$ を十分小さくとる。$\tilde{D} = D\setminus \bigcup_{j=1}^{n} \Delta(P_j,\varepsilon)$ 上で f は正則なので、Cauchy の積分定理より。

$$0=\int_{\partial\tilde{D}} f\,dz = \int_{\partial D} f\,dz - \sum_{j=1}^{n}\int_{|z-P_j|=\varepsilon} f\,dz = \int_{\partial \tilde{D}} f\,dz - \sum_{j=1}^{n} 2\pi i\, \mathrm{Res}_{P_j} f$$

■

残る問題は、どうやって留数を計算するか? 注「留数計算」とは別

◎ f が a で一位(以下)の極を持てば、

$$f(z) = a_{-1}(z-a)^{-1} + \varphi(z) \qquad \varphi(z) \text{ は } a \text{ の近くで正則。}$$

$$\boxed{\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \mathrm{Res}_a f} = \lim_{z\to a}\left(a_{-1} + (z-a)\varphi(z)\right) = a_{-1} + 0\varphi(0) = a_{-1}$$

◎ f が a で高々 n 位の極を持つとする。$(n<\infty)$

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-a)^j \qquad (a_j = 0 \text{ があるかもしれない})$$

$(z-a)^n f(z)$ は $z=a$ で正則(除去可能特異点)

a_{-1} は コイツの $(z-a)^{n-1}$ の係数。

$$\therefore \quad \boxed{\mathrm{Res}_a f = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(z-a)^n f(z)\Big|_{z=a}}$$

◎ f が真性特異点の場合、このような公式はない。(Laurent 展開を求めるしかない) $\left(\mathrm{Res}\ e^{\frac{1}{z}} = 1 \text{ くらいは分かる}\right)$

例

$f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-a)(z-b)}$ の留数を求める。

↳ $z \in \mathbb{C}\setminus\{a, b\}$ で正則 → 留数 0.

aでの留数を求める.

sin z は零点を持つので、それとカブると極じゃなくなるかも.

・$a \neq b$ のとき　$z=a$ は高々一位の極

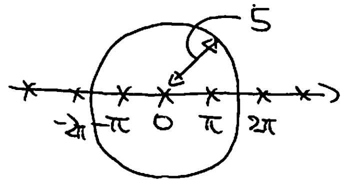
$$\mathrm{Res}_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{\sin z}{z-b} = \frac{\sin a}{a-b}$$

・$a=b$ のとき. $z=a$ は高々2位の極.

$$\mathrm{Res}_a f = \frac{d}{dz}(z-a)^2 f(z)\Big|_{z=a} = \frac{d}{dz}\sin z\Big|_{z=a} = \cos a$$

例 $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{dz}{\sin z}$　$(r \notin \pi\mathbb{Z})$　Sr

sin z は $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ に零点を持つ.



↑ 1位

ここは一位の極.

$$= 2\pi i \sum_{|a|<r}\mathrm{Res}_a \frac{1}{\sin z}$$

公式で!

$$\mathrm{Res}_{n\pi}\frac{1}{\sin z} = \lim_{z\to n\pi}\frac{z-n\pi}{\sin z} = \lim_{w\to 0}\frac{w}{\sin(w+n\pi)}\qquad w = z-n\pi$$

$$= 1\Big/\lim_{w\to 0}\frac{\sin(w+n\pi)}{w} = 1\Big/(-1)^n\lim_{w\to 0}\frac{\sin w}{w} = (-1)^n$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{\sin z} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|<\frac{r}{\pi}}}(-1)^n = \begin{cases} 1 & n : \text{even} \\ -1 & n : \text{odd}\end{cases}\qquad n\pi < r < (n+1)\pi$$

偏角の原理

$D \subset \mathbb{C}$: Greenの定理が使える領域.

$p_1, p_2, \dots, p_n \in D$　U を [D] を含む開集合.　i.e. 正則 又は 極.

$f: U\setminus\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \to \mathbb{C}$ で正則であり. f は p_j で高々極を持つ(定数でない)とする。 NOT 真性特異点.

このとき, $p \in D$ に対し.

$$f(z) = (z-p)^m \varphi(z)$$　($\varphi(z)$ は p の近くで正則 かつ $\varphi(p) \neq 0$)

と書く事が出来る。このmを f の p での位数といい, $m = \mathrm{ord}_p f$ と書く。

$$
\begin{cases}
\bullet\ m = 0 & f\text{は} p\text{で正則かつ } f(p) \neq 0 \\
\bullet\ m > 0 & f\text{は} p\text{で } m\text{位の零点を持つ} \\
\bullet\ m < 0 & f\text{は} p\text{で } m\text{位の極を持つ}
\end{cases}
$$

Thm (偏角の原理) 上の仮定の下.

$$
\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{p\in D} \mathrm{ord}_p f}
$$

(真性特異点は $m=-\infty$? 恒等的に0だと $m=+\infty$?)

($\mathrm{ord}_p f \neq 0$ となるpは$[D]$内に有限個)

更にfは∂D上に零点を持たないとする。

Proof.

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'}{f}dz = \sum_{p\in D}\mathrm{Res}_p\left(\frac{f'}{f}\right) \quad \leftarrow \quad \mathrm{Res}_p \frac{f'}{f} = \mathrm{ord}_p f
$$

を示せば良い。

$f(z) = (z-p)^m(\varphi(z)) \quad \varphi(p)\neq 0,\ m = \mathrm{ord}_p f.$

$$
\frac{f'}{f} = \frac{m(z-p)^{m-1}\varphi + (z-p)^m\varphi'}{(z-p)^m\varphi(z)} = m(z-p)^{-1} + \frac{\varphi'}{\varphi}
$$

$\varphi\neq 0$よりpで正則.

$$
\therefore\ \boxed{\mathrm{Res}\frac{f'}{f} = m = \mathrm{ord}_p f}
$$

■

$(\log f)' = \dfrac{f'}{f}$ ← 対数微分と言う。

なぜ偏角の原理と言うのか?

$D = \Delta(0,1)$ のとき、

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f'}{f}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dw}{w}
$$

$\gamma(\theta) = f(e^{i\theta}) \quad \theta = [0, 2\pi]$

$f: D \to \mathbb{C}$

$$
(\because)\ \int_\gamma \frac{dw}{w} = \int_0^{2\pi}\frac{\gamma'}{\gamma}d\theta
= \int_0^{2\pi}\frac{f'(e^{i\theta})(e^{i\theta})'}{f(e^{i\theta})}d\theta
= \int_{|z|=1}\frac{f'}{f}dz
$$

$\Delta(0,1)$内のfの零点の個数

γの0のまわりの回転数 (偏角の増加分)

応用　Rouché（ルーシェ）の定理

$f(z)$, $g(z)$ を多項式, $r>0$, とする。円 $|z|=r$ 上で

$|f(z)| > |g(z)|$ が成り立つとき、2つの方程式

$f(z)=0$, $f(z)+g(z)=0$ の $|z|<r$ での

根の個数は（重複度もこめて考えて）等しい。

Proof

$h(z) := f(z)+g(z)$ とし. $|z|=r$ のとき、

$$|f(z)| > |h(z) - f(z)|.$$

・$f(z)$ と $h(z)$ は $|z|=r$ 上で零点を持たない。

（$\because$ $f(z)=0 \Rightarrow 0 > |h(z)|$ 矛盾.
$h(z)=0 \Rightarrow |f(z)| > |f(z)|$ 矛盾.）

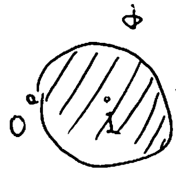
$|z|=r$ 上では. $\left|\dfrac{h(z)}{f(z)} - 1\right| < 1.$

$\varphi(z) := \dfrac{h(z)}{f(z)}$ とおくと. $\dfrac{\varphi'}{\varphi} = \dfrac{h'}{h} - \dfrac{f'}{f}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{\varphi'}{\varphi}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{h'}{h}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f'}{f}\,dz.$$

$=$（hの零点の個数）$-$（fの零点の個数）

あとは $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{\varphi'}{\varphi}\,dz = 0$ を示せば良い。 $|z|=r$ のとき. $|\varphi(z)-1|<1$.



$\varphi(z)$ はこの円の中を動く。

$\Delta(0,1)$ は 0 を含まない星型領域

なので、$\log z$ が定義できる

"$\displaystyle\int_1^z \frac{dw}{w}$"　　$(\log\varphi)' = \dfrac{\varphi'}{\varphi}$ ← 原始関数を持つので、

閉曲線での積分は $\underline{0}$ //.

例. $z^6 - 2z^5 + 7z^4 + z^3 - z + 1 = 0$ の $|z|<1$ 内の根の個数を求めよ。

$f = 7z^4$, $g = z^6 - 2z^5 + z^3 - z + 1$ とおく。

$|z| = 1$ のとき、 $|g| \leq |z|^6 + 2|z|^5 + |z|^3 + |z| + 1 = 6 < \overset{7}{\overset{\shortparallel}{|f(z)|}}$

Rouché の定理より、 $|z| < 1$ での $f+g=0$ と $f=0$ の根の個数は等しく 4