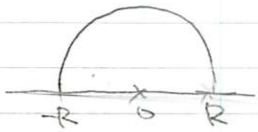
Date 1 · 15

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$: 有理式, $\deg Q \geq \deg P + 2$



Qは$\mathbb{R}$上に零点を持たない

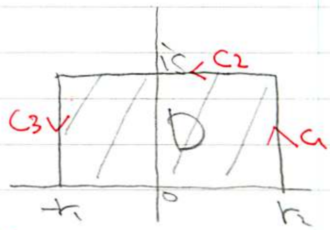
$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z>0} \mathrm{Res}_z R(z) e^{iz}$ — ⊞

これは $\deg Q \geq \deg P + 1$ でも成り立つ。

(↑ $\int_{-\infty}^{\infty} |R(x) e^{ix}|\, dx$ は収束しないときがある)

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\, dx := \lim_{\substack{r_1 \to \infty \\ r_2 \to \infty}} \int_{-r_1}^{r_2} R(x) e^{ix}\, dx$$

と定義する。



① 極限の存在と上のResの公式⊞の証明

$$\int_{-r_1}^{r_2} R(x) e^{ix}\, dx = \boxed{\int_{-C_1-C_2-C_3} R(z) e^{iz}\, dz} + \sum_{z \in D} \mathrm{Res}_z (R(z) e^{iz})$$

$\to 0$ ($r_1, r_2, s \to \infty$) を示せばよい

$\exists K, L > 0$ s.t. $|z| > L \Rightarrow |R(z)| \leq K \cdot |z|^{-1}$ ($\deg Q \geq \deg P + 1$ より)

$\left|\int_{C_1} R(z) e^{iz}\, dz\right| \leq \int_{C_1} |R(z)| e^{-y} |dz|$ ($z = x + iy$, $e^{iz} = e^{-y}$)

$r_2>L$のとき.

$$\int_{C_1}|R(z)|e^{-y}|dz| \le \int_0^s K\underbrace{|r_2+iy|^{-1}}_{\le r_2^{-1}}e^{-y}\,dy$$

$$\le r_2^{-1}K\int_0^s e^{-y}\,dy$$

$$= K\cdot r_2^{-1}(1-e^{-s})$$

$$\le K\cdot r_2^{-1}$$

同様に $r_1>L$のとき.

$$\left|\int_{C_3}R(z)e^{iz}dz\right| \le K\cdot r_1^{-1}$$

$$\left|\int_{C_2}R(z)e^{iz}dz\right| \le e^{-s}\int_{C_2}|R(z)||dz|$$

$s>L$のとき.

$$\le e^{-s}\int_{C_2}K\cdot|z|^{-1}|dz|$$

$$= e^{-s}\int_{-r_1}^{r_2}K\cdot\underbrace{|x+is|^{-1}}_{\le s^{-1}}dx$$

$$\le K\cdot e^{-s}s^{-1}(r_1+r_2)$$

よって $r_1, r_2, s>L$のとき..

$$\left|\int_{C_1+C_2+C_3}R(z)e^{iz}dz\right| \le K\left(r_1^{-1}+r_2^{-1}+e^{-s}s^{-1}(r_1+r_2)\right)$$

$s\to\infty$ とすると

$$\longrightarrow K(r_1^{-1}+r_2^{-1})$$

$r_1, r_2 \longrightarrow \infty$ とすると

$$\longrightarrow 0$$

よって 田 が示された □

4). $R(x)$が0に1位の極を持つ場合

$b>0$に対し

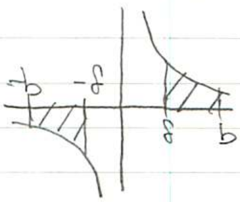
$$\int_{-b}^{b} R(x)e^{ix}\,dx$$

は意味を持たないが、主値積分

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{\delta<|x|<b} R(x)e^{ix}\,dx =: \mathrm{P.V.}\int_{-b}^{b} R(x)e^{ix}\,dx$$

を考えることができる。 $\left(\int_{\delta<|x|<b} := \int_{-b}^{-\delta}+\int_{\delta}^{b}\right)$

① 収束性の証明



$$R(x)e^{ix} = \frac{A}{x}+f(x)$$

($f(x)$は$x=0$の近くで正則)

と書ける

$$\int_{\delta<|x|<b} R(x) e^{ix}\,dx = \underbrace{\int_{\delta<|x|<b} \frac{A}{x}\,dx}_{=0} + \int_{\delta<|x|<b} f(x)\,dx$$

$$\int_{\delta<|x|<b} f(x)\,dx \xrightarrow{\delta \downarrow 0} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$$

$$\therefore \ \text{P.V.} \int_{-b}^{b} R(x) e^{ix}\,dx = \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$$

□.

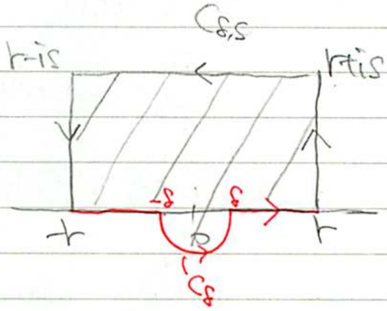
P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\,dx$ の計算

($R(x)$ の $\mathbb{R}$ 上にある極は 0 のみ
$x=0$ で1位の極
$R(x)=P(x)/Q(x)$, $\deg Q \geq \deg P+1$)

r, s が十分大きいとき

$$\left(\int_{\delta<|x|<r} + \int_{C_\delta} + \int_{C_{r,s}}\right) R(z) e^{iz}\,dz$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_z R(z) e^{iz} + A\right)$$



- $\lim_{\delta\to 0} \int_{\delta<|x|<r} R(x) e^{ix}\,dx$
  $= \text{P.V.} \int_{|x|<r} R(x) e^{ix}\,dx$

($R(x)e^{ix} = \frac{A}{x} + f(x)$
$A = \operatorname{Res}_0 R(z) e^{iz}$)

- $\int_{C_\delta} R(z) e^{iz}\,dz = \underline{\int_{C_\delta} \frac{A}{z}\,dz} + \int_{C_\delta} f(z)\,dz$

$$\int_{C_\delta} \frac{A}{z}\,dz = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{A}{\delta e^{i\theta}} \delta e^{i\theta} i\,d\theta = A\pi i$$

Date . . No.

$$\int_{C_\delta} f(z)\,dz \longrightarrow 0 \quad (\delta \to 0)$$

$$\because\ \left|\int_{C_\delta} f(z)\,dz\right|$$

$$\leq \int_{C_\delta} |f(z)|\,|dz| \qquad f:0\text{の近くで有界 } |f|\leq K$$

$$\leq K\cdot \int_{C_\delta} |dz|$$

$$= K\cdot \pi\delta \longrightarrow 0 \quad (\delta \to 0)$$

//

$$\therefore\ \int_{C_\delta} R(z)e^{iz}\,dz \longrightarrow A\pi i \quad (\delta \to 0)$$

。 $\int_{C_{r,s}} R(z)e^{iz}\,dz \longrightarrow 0$ （$s\to\infty$ のあと $r\to\infty$）

は上の計算と同様.

よって

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx$$

$$= 2\pi i\left(\sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_z R(z)e^{iz} + \frac{1}{2}\operatorname{Res}_0 R(z)e^{iz}\right)$$

□

⑪ $R(x)=P(x)/Q(x)$ が $\mathbb{R}$ 上に1位の極のみを持つとき

（$\deg Q \geq \deg P+1$）

$$\boxed{P.V.\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_z R(z)e^{iz} + \pi i\sum_{z\in\mathbb{R}} \operatorname{Res}_z R(z)e^{iz}}$$

No. Date

Ex $\quad \text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = \pi i$

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx$$
$$=\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos x}{x}+i\frac{\sin x}{x}\right)dx$$
$$=\text{P.V.}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx\right)$$

実部をみると $\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx = 0$

虚部を見ると $\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi$

$\frac{\sin x}{x}$ は $x=0$ でも正則なので P.V. を考える必要はない

よって $\quad \int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ $\quad /\!/$

5) $0<\alpha<1$.　$R(x)=P(x)/Q(x)$.　・$[0,\infty)$ に極を持たない.
・$\deg Q \geq \deg P+1$

このとき

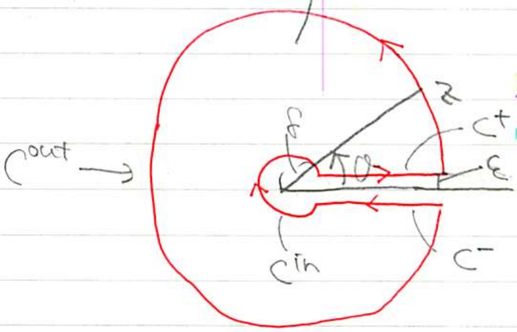
$$I=\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}dx$$ は収束する.

① Iを求める.

$$f(z):=\frac{R(z)}{z^\alpha}=R(z)e^{-\alpha\log z}$$

$\log z$は $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$で正則になるように
$\log z=\log|z|+i\theta$　$0<\theta<2\pi$
で定義する

$$\int_{C^{out}+C^{in}+C^++C^-} f(z)dz$$
$$=2\pi i\sum_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{Res}_z f(z)$$



・$$\left|\int_{C^{in}}f(z)dz\right|\leq\int_{|z|=\delta}|f||dz|$$
$$=\int_{|z|=\delta}|R(z)|\,\delta^{-\alpha}|dz|$$
0の近くで有界. $|R(z)|<K$
$$\leq K\cdot\delta^{-\alpha}\int_{|z|=\delta}|dz|=2\pi K\,\delta^{1-\alpha}\longrightarrow 0$$
$(\delta\to 0)$

No. Date

∘ $\left|\int_{C^{out}} f(z)\,dz\right| \le \int_{C^{out}} |R(z)||z|^{-\alpha}\,|dz| \quad (|R(z)| \le K\cdot|z|^{-1})$

$$\le K r^{-1}\cdot r^{-\alpha}\underbrace{\int_{C^{out}}|dz|}_{2\pi r}$$

$$\le 2\pi K\cdot r^{-\alpha} \longrightarrow 0 \ (r\to\infty)$$

∘ $\int_{C^+} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0,\ \delta\downarrow 0,\ r\uparrow\infty]{} \int_0^\infty R(x)\,x^{-\alpha}\,dx = I$

∘ $\int_{C^-} f(z)\,dz$

$z = x-\varepsilon i$ (C^-)

$\log z \longrightarrow \log x + 2\pi i$ $(\varepsilon\downarrow 0)$

$$\longrightarrow \int_\infty^0 R(x)\,e^{-\alpha(\log x+2\pi i)}\,dx$$

$$= -\int_0^\infty R(x)\,e^{-\alpha}e^{-2\pi i\alpha}\,dx$$

$$= -e^{-2\pi i\alpha} I$$

$$\therefore\ (1-e^{-2\pi i\alpha})\,I = 2\pi i\sum_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{Res}_z f(z)$$

$$\therefore\ \boxed{I = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\sum_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{Res}_z f(z)}$$

□

Ex

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$$ $\frac{1}{1+x}$ の極は $x=-1$ のみ.

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{-2\alpha\pi i}}\,\mathrm{Res}_{-1}\frac{e^{-\alpha\log z}}{1+z}$$

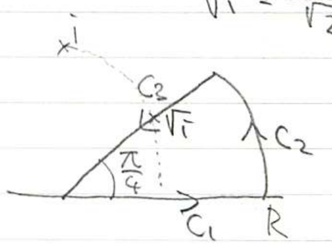
$$=\frac{2\pi i}{1-e^{-2\alpha\pi i}}\,e^{-\alpha\log(-1)}$$

$$=\frac{2\pi i}{1-e^{-2\alpha\pi i}}\,e^{-\alpha\pi i}=\frac{2\pi i}{e^{\alpha\pi i}-e^{-\alpha\pi i}}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

//

Ex

$\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$



① $$\int_0^\infty \sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$f(z)=e^{-z^2}$$

$$\int_{C_1+C_2+C_3} f(z)\,dz=0$$

・ $\int_{C_2} f(z)\,dz \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty)$

・ $\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_0^R e^{-x^2}dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Gauss積分

・ $$\int_{C_3} f(z)\,dz=\int_R^0 e^{-ix^2}\sqrt{i}\,dx$$
$$=-\sqrt{i}\int_0^R e^{-ix^2}dx$$

$R\to\infty$ のとき

$$0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\underset{\substack{\| \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{i}}\int_0^\infty e^{-ix^2}dx$$

No. Date

よって

$$(1+i)\int_0^\infty e^{-ix^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{-ix^2} = \cos x^2 - i\sin x^2$$

実部と虚部を見ると

$$\begin{cases} \int \cos x^2 + \int \sin x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int \cos x^2 - \int \sin x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^\infty \sin x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{———} //$$