数学 III レポート問題　　2006 年 1 月 11 日配布

期末試験の開始までにアドミニストレーション棟のレポート・ボックスに提出すること.
この問題は http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-III-2005/ からダウンロードできます.

問題 1. 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ において原点 O から (x,y,z) までの距離 r と角 $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$ をもちいて次のように極座標を定義する：

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

(a) ラプラシアン $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ は極座標 (r,θ,φ) で

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

と書けることを示せ（計算を省略せずに書くこと）.

(b) r にのみ依存する関数 $f(x,y,z) = g(r) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ が $r>0$ において $\Delta f = 0$ をみたすのは

$$g(r) = a + \frac{b}{r} \quad (\text{ここで } a, b \text{ は定数})$$

の場合に限ることを示せ. ［ヒント:$g(r) = h(r)r^{-1}$ とおき h に関する条件を求めよ. ］

(c) $c>0$ に対して $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le c^2\}$ とおくとき広義積分

$$\iiint_W \left(a + \frac{b}{r}\right) dxdydz$$

を求めよ.

問題 2. 次の関数の極値を求めよ. またそれらが最大, 最小値を与えるかを調べよ.

(a) $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$　　　(b) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$

問題 3. 二項級数 $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ を積分すれば $|x|<1$ において

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

がえられる. この展開が $x=1$ でも成り立つこと, すなわち

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

を示せ.（アーベルの第 2 定理 (定理 6.23) からも導くことができるが, 下のように初等的に示してほしい.）ヒント：$\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n x^{2n} + H_k(x)$ をみたす有理式 $H_k(x)$ を求め

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 H_k(x)dx = 0$$

を示せ.