数学 II　レポート問題　2007 年 1 月 11 日配布　担当 平地健吾

・期末試験の開始までにアドミニストレーション棟のレポート・ボックスに提出すること．

・このレポートは「優」「良」の判定には関係ありませんが、期末試験の点数が低い場合の合否決定の参考にします。

・この問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-III-2006/` からダウンロードできます．

[1] 次の行列に行基本変形を行って階段行列にせよ．その際，変形の手順を詳しく記すこと．

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

[2] 2 つの $m \times n$ 行列 C, C' が**対等**であるとは，ある m 次正則行列 A とある n 次正則行列 B が存在して，$C' = ACB$ が成り立つことをいう．

2 つの行列 C, C' が対等であるための必要十分条件は，$\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} C'$ であることを証明せよ．

[3] A は正方行列とする．次の各命題に対し，正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．(それが反例になっていることの説明も書くこと)

(1) $|A| = 0$ ならば，0 は A の固有値である．

(2) A の各成分が全て正の整数ならば，A の固有値は全て整数である．

(3) $\lambda \neq 0$ とする．λ が正則行列 A の固有値ならば，λ^{-1} は A^{-1} の固有値である．

(4) $A^2 = A$ が成立するならば，A の固有値は 0 か 1 である．

[4] σ を次で定める 9 次対称群の元とする．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

いま，線形変換 $f_\sigma : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ を $f_\sigma(x_1, \ldots, x_9) = \big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(9)}\big)$ によって定める．適当な $\mathbb{R}^9$ の基底に関して f_σ を行列表示したものを A とする．このとき，行列 A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ．(固有多項式は基底の取り方によらずに定まることに注意.)

[5] 次の各行列が対角化可能か否かを判定せよ．対角化可能な場合は対角化せよ．

(例えば，$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ の場合は，$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} B \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ のように書くこと.)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

[6] n 次正方行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ とし，固有値 λ_i の重複度を m_i $(1 \leq i \leq s)$ とする．いま，多項式 $f(x)$ を

$$f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_s)$$

とおく．このとき，A が対角化可能ならば，$f(A) = O$ であることを証明せよ．

*** 裏面に続く ***

[7] 次の問題に答えよ.

(1) シュミットの正規直交化法を用いて，$\mathbb{R}^3$ の元

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

を正規直交化せよ.（計算の過程を示すこと）

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，直交行列 B と対角成分がすべて正の数である上三角行列 C で，$A = BC$ を満たすものはただ 1 組しか存在しない．そのような B, C を求めよ.

[8] n 次元計量ベクトル空間 V と，V の部分空間 W が与えられている．任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$\boldsymbol{y} \in W$ と $\boldsymbol{z} \in W^{\perp}$ がただ 1 組存在して，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$$

と書けることを講義で証明した．このとき，次を示せ.

「このようにして定まった $\boldsymbol{y}$ は

$$\text{任意の } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対して，} \quad \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \qquad \cdots\cdots (*)$$

を満たす．即ち，$\boldsymbol{y}$ は W の元の中で最も $\boldsymbol{x}$ に近い元である.」

（注意：$(*)$ を満たすような $\boldsymbol{y} \in W$ はただ 1 つしか存在しないことも示される.
従って，$(*)$ は「$\boldsymbol{x}$ の W への**直交射影**」の別の特徴付けともなっている.）

[9] n 次複素正方行列 A, B はユニタリー行列であるとする.

(1) AB, A^{-1} もユニタリー行列であることを示せ.

(2) A の固有値の絶対値はすべて 1 であることを示せ.

[10] 次の実対称行列を，直交行列によって対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[11] x_1, x_2, x_3, x_4 についての 2 次形式

$$2{x_1}^2 + {x_2}^2 + a{x_3}^2 + 3{x_4}^2 + ax_1x_2 + 2x_1x_4 + 2ax_2x_4$$

が正定値であるような実数 a の範囲を求めよ.

[12] A をエルミット行列とするとき，次の 2 条件が同値であることを証明せよ.

(a) A は正定値である.

(b) ある正則行列 P が存在して，$A = P^*P$ と書ける.