数学 II 演習　2001 年 4 月 17 日　担当　平地健吾, TA 逆井卓也

以下の二問を次回（５月１日）の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること. 用紙は A4 を用いること。

[R1] (x, y, z) 空間内の平面 $ax + by + cz + d = 0$ と点 $P = (x_1, y_1, z_1)$ との距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で与えられることを示せ。

[R2] 平面上の二つベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を与えておく。写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$ によって定義する。

(1) f は１次変換であることを示せ。

(2) １次変換 f の行列を求めよ。

以下の問題はこの演習の時間に解いて、希望者は黒板で解答を説明してください（成績に少しだけ加点します；次回でもよい)。

[1] 平面上に１つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を与えておく。写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ および $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ をそれぞれ $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$, $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$ によって定義する。ここで $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$ はベクトルの内積を意味する。

(1) f, g は１次変換であることを確かめよ。

(2) １次変換 f, g の行列を求めよ。

[2] 次のようなベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直で点 P を通る平面の方程式を求めよ。

(1) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$,　$P = (4, 2, -1)$;

(2) $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3$,　$P = (2, 3, -5)$;

(3) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2$,　$P = (2, 3, 7)$.

[3] 次のような３点を通る平面の方程式を求めよ。

(1) $(2, 1, 1), (3, -1, 1), (4, 1, -1)$;

(2) $(-2, 3, -1), (2, 2, 3), (-4, -1, 1)$;

(3) $(-5, -1, 2), (1, 2, -1), (3, -1, 2)$.

[4] 次のような点と平面の距離を求めよ。

(1) $(1, 1, 2)$,　$3x + y - 5z - 2 = 0$;

(2) $(-1, 3, 2)$,　$2x - 4y + z - 1 = 0$;

(3) $(3, -2, 1)$,　yz-平面;

(4) $(-3, -2, 1)$,　yz-平面.

数学 II 演習　2001 年 5 月 1 日　担当　平地健吾, TA 逆井卓也

以下の二問を次回（５月１５日）の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出して下さい。用紙は A4 を用いて下さい。

[R3] 次の列ベクトルが一次独立かどうか調べよ。一次従属ならば、それらのベクトルの自明でない一次結合によって $\boldsymbol{o}$（ゼロベクトル）を表せ（一つの例を与えればよい；全ての解を求める必要はない）。

(1) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

[R4] パラメーター a, b を含む次の一次方程式系を解け。(a, b について場合分けをしっかりと行ってください。)

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= b \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + ax_4 &= 0 \end{cases}$$

以下の問題はこの演習の時間に解いて、希望者は黒板で解答を説明してください。(一回の発表はレポート提出一回と同じポイントとして集計します；ただし問題は小問をまとめて一つとみなし、正解のときのみポイントとします)。

[5] 次のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ の一次結合として書け。

$$(1)\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},\ (2)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ -2 \end{pmatrix},\ (3)\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[6] 次の行列の階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

[7] $\mathbf{R}^2$ において、一次独立なベクトルの最大個数は 2 個であることを示せ。

[8] $\mathbf{R}^3$ の部分空間は、$\{\boldsymbol{o}\}$、原点を通る直線、原点を通る平面、$\mathbf{R}^3$ の 4 つの場合のみとなることを示せ。

[9] 次の一次方程式系を解け。

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 12x_3 - x_4 &= 7 \end{cases}$

[10] 次の一次方程式系が解をもたないことを示せ。

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 13x_4 &= -10 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 9x_4 &= -7 \end{cases}$

数学 II 演習　2001 年 5 月 15 日　担当　平地健吾, TA 逆井卓也

以下の二問を次回（5 月 29 日）の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出して下さい。用紙は A4 を用いて下さい。

[R5] (1) 実行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は $a = b = 0$ でない限り正則であることを示せ。
(2) 上のような A に対して複素数 $\alpha = a + ib$,（a, b は実数）を対応させる。これを $A \longleftrightarrow \alpha$ と書くことにする。この対応により、上のような形の行列全体の集合と複素数全体の集合が一対一にもれなく対応する。このとき、行列の和、積、逆行列には、複素数の和、積、逆数がそれぞれ対応することを示せ。

[R6] $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$（$a$ は定数）, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、$A^n, B^n, (A+B)^n$ を求めよ。

以下の問題はこの演習の時間に解いて、希望者は黒板で解答を説明してください。（一回の発表はレポート提出一回と同じポイントとして集計します；ただし問題は小問をまとめて一つとみなし、正解のときのみポイントとします。）

[11] 行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{b}$ が次のように与えられたとき、$\boldsymbol{x}$ に関する一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 4 & 39 \\ 8 & 9 & 8 & 83 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

[12] (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O$ を示せ。
(2) $A^2 = O$ となるような 2 次の実行列 A をすべて求めよ。

[13] (1) A が正則であれば A^{-1} も正則であり $(A^{-1})^{-1} = A$ であることを示せ。
(2) A, B が共に正則であれば、$AB = BA$ であるための必要十分条件は $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることを示せ。
(3) ある自然数 k について A^k が正則であれば、任意の自然数 n について A^n が正則であることを示せ。

[14] (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき、A^{-1} を求めよ。
(2) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする。(1) の A に関して、$\boldsymbol{x}$ に関する一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $A^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をそれぞれ解け。

[15] $\boldsymbol{x}$ に関する一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一つの解 $\boldsymbol{x}_s$ が与えられたとき、$\boldsymbol{y}$ がこの方程式の解である必要十分条件は、一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ のある解 $\boldsymbol{x}_0$ を用いて $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_s$ とかけることであることを示せ。

[16] A を正方行列とする。$\boldsymbol{x}$ に関する一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が任意の $\boldsymbol{b}$ について解を持つ必要十分条件は A が正則であることを示せ。

[17] 行列 A, B が $AB = BA$ を満たすとき、2 項展開 $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k A^{n-k} B^k$ が成り立つことを示せ。

数学II演習　2001年6月1日　担当　平地健吾, TA 逆井卓也

レポート問題はありません。以下の問題をこの演習の時間に解いて、希望者は黒板で解答を説明してください。（一回の発表はレポート提出一回と同じポイントとして集計します；ただし問題は小問をまとめて一つとみなし、正解のときのみポイントとします。）

[18] (1) 2次の直交行列をすべて求めよ。
(2) 2次のエルミット行列をすべて求めよ。

[19] A を n 次正方行列とする。以下の必要十分性を証明せよ。((1) (2) は実内積、(3) (4) は複素内積を使っていることに注意。）以下 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とする。

(1) A が対称行列	$\Longleftrightarrow$	任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ について $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$
(2) A が直交行列	$\Longleftrightarrow$	任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ について $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
	$\Longleftrightarrow$	任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$
(3) A がエルミット行列	$\Longleftrightarrow$	任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ について $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$
(4) A がユニタリ行列	$\Longleftrightarrow$	任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ について $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
	$\Longleftrightarrow$	任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ について $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$

[20] (1) A がエルミット行列なら任意の自然数 n について A^n もエルミット行列であることを示せ。
(2) A をエルミット行列とする。ある自然数 k について $A^k = O$ ならば $A = O$ であることを示せ。

[21] 行列 A, B が次のように与えられたとき、正方行列 X に関する方程式 $AX = B$ を解け。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = I_3$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[22] X_n は正則でかつ各成分は0または1であるような n 次正方行列の集合であるとする。
(1) X_2 の要素をすべて書き出せ。
(2) X_3 に属する要素の個数を求めよ（やや難問）。

数学 II 演習　2001 年 6 月 26 日　担当　平地健吾, TA 逆井卓也

以下の問題を次回（7 月 13 日）の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出して下さい。用紙は A4 を用いて下さい。

[R7] n 次対称群 S_n について次の問いに答えよ。

(1) σ が S_n 全体を重複なく動くとき、σ^{-1} も S_n 全体を重複なく動くことを示せ。
(2) τ を固定された S_n の元とする。σ が S_n 全体を重複なく動くとき、$\sigma\tau$ も、また $\tau\sigma$ も S_n 全体を重複なく動くことを示せ。

[R8] 平面上の同一直線上にない 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を通る円の方程式は

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。

以下の問題はこの演習の時間に解いて、希望者は黒板で解答を説明してください。（一回の発表はレポート提出一回と同じポイントとして集計します；ただし問題は小問をまとめて一つとみなし、正解のときのみポイントとします。）

[23] 次の置換を互換の積で表せ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

[24] 置換に関する次の問いに答えよ。

(1) 任意の置換を互換の積で表したとき、その互換の個数が偶数であるか奇数であるかは互換の積の表し方によらないことを示せ。（実質、講義でやっています）

(2) (1) から互換の個数が偶数の置換を偶置換、奇数の置換を奇置換という。n 次の偶置換と奇置換の個数は等しいことを示せ。またそれはいくつあるか求めよ。

[25] 次の置換が偶置換であるか奇置換であるか判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n \\ n-k+2 & n-k+3 & \dots & n & 1 & 2 & \dots & n-k & n-k+1 \end{pmatrix}$
ただし $1 \leq k \leq n$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

[26] 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 70 & 42 & 25 \\ 26 & 13 & 16 \\ 94 & 54 & 40 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ (4)
$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

[27] A, D を正方行列とするとき $\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$ が成り立つことを示せ。ここで O は零行列を表す。

[28] A, B は n 次実正方行列であるとする。

(1) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$ を示せ。

(2) $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A+\sqrt{-1}B)|^2$ を示せ。

[29] 次の行列式を計算せよ。ただし行列はすべて実行列とする。

(1) $\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix}$ A, B, C, D は正方行列

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} \qquad (5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

数学 II 演習　2001 年 7 月 13 日　担当　平地健吾, TA 逆井卓也

以下の問題をこの演習の時間に解いて、希望者は黒板で解答を説明してください。（一回の発表はレポート提出一回と同じポイントとして集計します; ただし問題は小問をまとめて一つとみなし、正解のときのみポイントとします。）

[**30**] 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

[**31**] クラーメルの公式を用いて次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$　（ただし $a\neq b, b\neq c, c\neq a$ ）

[**32**] クラーメルの公式を用いて次の実係数の一次方程式系を解け。

(1) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & -1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1 - bx_2 - cx_3 - dx_4 & = & 0 \\ bx_1 + x_2 - dx_3 + cx_4 & = & 1 \\ cx_1 + dx_2 + x_3 - bx_4 & = & 0 \\ dx_1 - cx_2 + bx_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$

[**33**] (1) エルミート行列の行列式は実数であることを示せ。

(2) ユニタリ行列の行列式は絶対値 1 の複素数であることを示せ。直交行列のときはどうなるか答えよ。

(3) 正方行列 A がある n に対して $A^n = O$ を満たせば A の行列式は 0 であることを示せ。

[**34**] n 次複素正方行列 A に対し、変数 λ に関する n 次方程式 $\det(\lambda I_n - A) = 0$ を考える。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & 1 & 1 \\ 16 & 5 & -1 & -2 \\ -28 & -8 & 4 & 2 \\ -14 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して上の方程式の解を求めよ。

(2) P を正則行列とするとき、行列 $P^{-1}AP$ に対する方程式は A に対する方程式と一致することを示せ。

[35] n 次行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ a & 1 & a & \dots & a \\ a & a & 1 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & 1 \end{pmatrix}$ の行列式を計算し、逆行列を求めよ。

ただし $0 < a < 1$ とする。

[36] A が正則行列、D が正方行列のとき、次が成り立つことを示せ。

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (\det A)\cdot\det(D - CA^{-1}B)$$

[37] 次の行列式を計算せよ。((5) については等式を証明せよ。)

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & b \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \dots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{\alpha^n=1} (x_0+\alpha x_1+\alpha^2 x_2+\ldots+\alpha^{n-1}x_{n-1})$

ただし右辺は 1 の n 乗根すべてにわたる積を表す。

数学 IV　2001年10月19日配付　担当　平地健吾

１０月１２日の講義

・ 数ベクトル空間を一般化することにより抽象ベクトル空間が定義される
・和とスカラー倍の演算が与えられれば線形代数ができる
・多項式の空間、連続関数のなす空間などが例
・ベクトル空間での計算は数ベクトルのように行ってよい

１０月１９日の講義

・ベクトル空間における一次独立、一次従属の概念を用いた推論
・有限次元ベクトル空間の定義と基底の存在
・次元の定義

練習問題　以下では V を実ベクトル空間とする。

[3]　$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ を一次独立なベクトルとする。$\boldsymbol{w} \in V \setminus S[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r]$ であれば $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}$ は一次独立であることを示せ。

[4]　n 次以下の多項式のなすベクトル空間 P_n の次元を求めよ。

[5]　3×3 行列全体のなす集合 $M_3(\mathbb{R})$ は行列の和および定数倍に関してベクトル空間になる。 $M_3(\mathbb{R})$ の基底を一組与え $M_3(\mathbb{R})$ の次元を求めよ。

[6]　W を V の部分空間とするとき $\dim W \leq \dim V$ であることを示せ。また $\dim W = \dim V$ であれば $W = V$ となることを示せ。(定理３を使うと簡単)

[7]　$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を x_1, x_2, x_3 と書き次のような $\mathbb{R}^3$ の部分集合を考える

$$W_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

$$W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$$

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は $W_1 \cap W_2$ の基底であることを示せ。

(2) $i = 1, 2$ に対して W_i のベクトル $\boldsymbol{w}_i$ を選び $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}_i$ が W_i の基底となるようにせよ。

(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ。

数学 IV　2001年10月26日配付　担当　平地健吾

１０月２６日の講義

・ 線形写像の定義、その例

・数ベクトル空間の間の線形写像は行列とベクトルの積として表される

・線形写像の和、スカラー倍、合成、逆は行列の和、スカラー倍、積、逆に対応する

練習問題

[8] $\mathbb{R}^1$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4x \\ a-x \end{pmatrix}$ が線形となるための a に関する条件を求めよ。

[9] $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix}$ に対して $f = L_A$ となる行列 A を求めよ。

[10] (次の主張は講義ではほぼ明らかだとして証明を省きましたが一度確かめて下さい．)

(1) 線形写像 f, g の和 $f+g$ は線形写像になる。

(2) 線形写像 f が逆写像 f^{-1} を持てば f^{-1} も線形写像である。

[11] 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対して $f(\boldsymbol{e}_j) = \lambda_j \boldsymbol{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$, を満たすとき $f = L_A$ となる行列 A を求めよ。（定理 6 の証明を見よ）

[12] 次の線形写像は同型写像か？

$$(1)\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ y \end{pmatrix}, \qquad (2)\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -y \\ 2y \end{pmatrix}$$

（定理 9 を用いればよい）

数学 IV　2001 年 11 月 9 日配付　担当　平地健吾

１１月９日の講義

・線形写像の像空間と核空間

・線形写像の階数（＝像空間の次元）は対応する行列の階数に等しい

・階数と核空間の次元の間の関係式、写像の合成と階数の関係

練習問題

[13] 線形写像の核空間は部分空間であることを確かめよ。

[14] $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ を $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix}$ と定義する。

(1) Ker f, Im f を求めよ。

(2) dim Ker f と rank f を求めよ。

(定理 11 を用いれば一方だけを計算すればよいことが分かる)

[15] $C^\infty(I)$ を開区間 $I=(0,1)$ 上の無限回微分可能な関数のなす集合とする。

(1) $C^\infty(I)$ は I 上の連続関数のなすベクトル空間 $C(I)$ の部分空間であることを示せ。($C(I)$ は有限次元ベクトル空間ではないので本来この講義の対象ではないが今だけは例外として下さい。)

(2) $f\in C^\infty(I)$ に対して $D(f):=f'$ とおけば $D:C^\infty(I)\to C^\infty(I)$ は線形写像であることを確かめよ。ここで f' は f の導関数である。

(3) Im D および Ker D を求めよ。

[16] $f,g:V\to W$ を二つの線形写像とするとき

$$\mathrm{rank}(f+g)\le \mathrm{rank}\ f+\mathrm{rank}\ g$$

が成り立つことを示せ。

数学 IV　 2001 年 11 月 16 日配付　担当　平地健吾

１１月 16 日の講義

・ 線形写像の合成と階数の関係

・ 線形写像と連立一次方程式の関係：解の存在は像に入っているかどうかで判定できる．解の自由度は核空間の次元として表される。

・固有値と固有ベクトルの定義。固有値は特性方程式の解になっている。

練習問題

[14] 実数 a, b に対して $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ とおく。

$$\mathrm{rank}(AB) = \min(\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B)$$

を示せ。

[15] **(やや難)** A を $n \times m$ 行列、B を $m \times l$ 行列とするとき

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - m \leq \mathrm{rank}AB$$

が成り立つことを示せ。

[16] $M(n, n)$ を n 実正方行列のなすベクトル空間とする。$A = (a_{ij})$ に対して $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ とおき線形写像 $Tr : M(n, n) \to \mathbb{R}$ を定義する。Tr の像空間と核空間の次元を求めよ。

[17] $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$ の特性多項式 $\Delta_A(x)$ を求めよ。

数学 IV　2001年11月30日配付　担当　平地健吾

１１月３０日の講義

・ 行列の対角化可能である必要十分条件は固有ベクトルで基底が作れること

・ 相異なる固有値の固有ベクトルは一次独立である

・ ２×２行列が相異なる二つの固有値を持てば対角化可能

・２×２行列の固有値が一つの場合，対角化可能なのは既に対角行列になっている場合に限る．

・２×２行列のジョルダン標準形

練習問題

[**19**]　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP$ が対角行列になる P を (一つ) 求めよ．また，この表示を用いて A^n を求めよ．

[**20**]　次の行列は対角化可能かどうか調べよ．

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

[**21**]　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の特性多項式を $\Delta_A(x) = x^2 + c_1 x + c_2$ とおく．

(a) $c_1 = a + d$, $c_2 = |A|$ であることを確かめよ．

(b) $\Delta_A(A) = A^2 + c_1 A + c_2 I_2 = O$ であることを示せ．(一般の $n \times n$ 行列に対しても $\Delta_A(A) = O$ が成り立つ．これをハミルトン・ケイリーの定理という．時間があれば講義の中で証明する．)

[**22**]　$A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ の（複素）固有値と固有ベクトルを求めよ．

[**23**]　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について $S_n = A + A^2 + \cdots + A^n$ を求めよ．

数学 IV　 2001年12月7日配付　担当　平地健吾

１２月７日の講義

・ 3×3 行列の対角化：３つの相異なる固有値をもてば対角化可能
・ 固有空間の次元と固有値の重複度の関係
・ ベクトル空間の直和
・ $n\times n$ 行列が対角化可能 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}^n$ が固有空間の直和になる
・ 3×3 行列の対角化：固有値が２つの場合

練習問題

[24] 次の行列の固有値と固有空間の基底を求め、その対角化可能性を調べよ。

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[25] U, V, W を $\mathbb{C}^n$ の部分空間とする。$U=V\oplus W$ (直和) であれば任意の $\boldsymbol{u}\in U$ は $\boldsymbol{v}\in V$ と $\boldsymbol{w}\in W$ の和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ として一意的に表されることを示せ。

[26] B, C, D を n 次正方行列とするとき $2n$ 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

の特性多項式は $\Delta_A(x)=\Delta_B(x)\Delta_D(x)$ を満たすことを示せ。

[27] A を n 次正方行列, P を n 次正則行列とするとき A と $P^{-1}AP$ の特性多項式は一致することを示せ。

[28] A の固有値を (重複度もこめて) $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ とするとき $|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n$ を示せ。

数学 IV　2001年12月14日配付　担当　平地健吾

１２月１４日の講義

・固有値の重複度と固有空間の次元の関係

・３×３行列の対角化可能性の調べ方

・行列の三角化とハミルトン・ケイリーの定理

練習問題

[29] n 次正方行列 A がある自然数 m に対して $A^m = I_n$ を満たすとする。A の固有値は 1 の m 乗根であることを示せ。

[30] (やや難) n 次正方行列 A が $A^2 = A$ を満たすとする。つぎを示せ。

(a) A の固有値は $0, 1$ である。

(b) $\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \mathrm{Im} A$

(c) A は対角化可能。

[31] A, B を n 次正方行列とするとき AB と BA の固有値は一致するか？A が正則行列のときはどうか？

[32] 行列 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ を多項式 $f(x)$ に代入して得られる行列 $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)$ であることを示せ。

[33] n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ とおく（これを A のトレースという）。A の固有値を (重複度もこめて) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とするとき $tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ であることを示せ。

[34] n 次正方行列 A の特性多項式を $\Delta_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$ とする．ここで $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は相異なる固有値である．このとき A が対角化可能である必要十分条件は $\dim E(\lambda_i) = m_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ であることを示せ.

数学 IV　2001 年 12 月 21 日配付　担当　平地健吾

１２月２１日の講義

・内積の定義と基本性質（ピタゴラスの定理，シュワルツの不等式，三角不等式）

・ベクトルのなす角度

・正規直交系（シュミットの直交化法）

・直交補空間

レポート問題

以下の問題から５問以上を解答し １月１１日または１月２５日の講義の終了時に提出すること（１月２９日（火）に繰り上げ期末試験を行います）．レポートと交換に略解を配付する．

[R1] 線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ を

$$f(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x-y+5z-3w\\ 3x+y-3z+2w\\ 5x-y-7z-5w\end{pmatrix}$$

により定義する．$\ker f$ および Im f の基底を与えよ．

[R2] V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V$ が一次独立であるが, 任意の $\boldsymbol{w}\in V$ に対して $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}$ は一次従属であるとする．このとき $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ は V の基底であることを示せ．

[R3] W_1, W_2 を $\mathbb{R}^n = W_1+W_2$ となる $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．$\dim W_1+\dim W_2 = n$ のとき，およびそのときに限り $\mathbb{R}^n = W_1\oplus W_2$ が成り立つことを示せ．

[R4] A, B を n 次正方行で $AB=O$ を満たすものとする．このとき $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B\le n$ であることを示せ．

[R5] $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を線形写像とする．V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき $f(V)$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間であり $\dim f(V)\le\dim V$ が成り立つことを示せ．

[R6] $A=(a_{ij})$ を n 次正方行列．その特性多項式を

$$\Delta_A(x) = |xI_n - A| = x^n + a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

とする．$\Delta_A(x)=0$ の根を重複度もこめて $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ とするとき次を示せ．

(a) $-a_1 = \mathrm{trace}A = \lambda_1+\cdots+\lambda_n$ ここで $\mathrm{trace}A = a_{11}+\cdots+a_{nn}$.

(b) $(-1)^n a_n = |A| = \lambda_1\cdots\lambda_n$.

[R7] [R6] と同じ記号のもと $\mathrm{trace}A^k = \lambda_1^k+\cdots+\lambda_n^k$ が全ての自然数 k に対して成り立つことを示せ．

[R8] 次の行列は対角化可能か？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[R9] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ についてハミルトン・ケーリーの定理を用いて A^{60} を求めよ．(x^{60} を $\Delta_A(x)$ で割った余りとしてえられる二次多項式に A を代入すればよい．)

[R10] n 次正方行列 A の全ての固有値が 0 であれば $A^n = 0$ であることを示せ.

[R11] (難) A を n 次正方行, A の定義する線形写像を $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ とする．A が対角化可能である必要十分条件は $f_A(V) \subset V$ を満たす $\mathbb{C}^n$ の任意の部分空間 V にたいして $\mathbb{C}^n$ の部分空間 W で

$$f_A(W) \subset W \quad \text{かつ} \quad \mathbb{C}^n = V \oplus W$$

であるものが存在することであることを示せ.

[R12] (難) A を n 次正方行, A の定義する線形写像を $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ とする．A が対角化可能である必要十分条件は $f_A(V) \subset V$ を満たす $\mathbb{C}^n$ の任意の部分空間 V にたいして $\mathbb{C}^n$ の部分空間 W で

$$f_A(W) \subset W \quad \text{かつ} \quad \mathbb{C}^n = V \oplus W$$

であるものが存在することであることを示せ.

数学 IV　2002 年 1 月 11 日配付　担当　平地健吾

１月１１日の講義

・直交補空間
・直交行列と内積の関係
・エルミート内積とユニタリ行列
・エルミート行列（対称行列）のユニタリ行列（直交）による対角化

練習問題

[35] $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 = 4(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ を示せ。

[36] $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をシュミットの方法で正規直交化せよ。

[37] $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ を互いに直交する s 個のベクトルとするとき $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は一次独立であることを示せ。

[38] 2 次直交行列はある θ に対して $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ の形に表されることを示せ。

[39] V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき $(V+W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$ を示せ。

[40] 次の行列が直交行列となるように a, b, c の値を定めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ b & c & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

[41] n 次実対称行列 A が定義する線形写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える。このとき $(\ker f_A)^\perp = \mathrm{Im} f_A$ を示せ。