数学IA 中間試験　130点満点　解答例

1 (a)[10点] 数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ の定義を書け
(b) [20点] 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = b$ を満たすとする．$a = b$ であれば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$a \neq b$ であれば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことを示せ．
(c) [10点] 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $b_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ によって定義する．極限 $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在することを示せ

(b) $a = b$ であれば $\forall\varepsilon > 0$ に対して N_1 と N_2 が存在して $n > N_1 \Rightarrow |a_{2n} - a| < \varepsilon$ および $n > N_2 \Rightarrow |a_{2n+1} - a| < \varepsilon$ が成り立つ．$N = 2\max\{N_1, N_2\} + 1$ とおけば $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$．よって $\{a_n\}$ は a に収束する．

$a \neq b$ のときは対偶を考える．$\lim a_n = c$ とすると $\forall\varepsilon > 0$ に対して $\exists N$ s.t. $n > N_1 \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon$．とくに n が偶数のときを考えれば $\lim a_{2n} = c$, n が奇数のときを考えれば $\lim a_{2n+1} = c$．よって $a = c = b$．

(c) $b_2 > b_4 > b_6 > \cdots > b_5 > b_3 > b_1$ なので $\{b_{2n}\}$ は有界な減少列，$\{b_{2n+1}\}$ は有界な増大列．実数の連続性によりこれらは収束する．一方 $\lim |b_{2n} - b_{2n+1}| = \lim(4n+3)^{-1} = 0$ なので $\lim b_{2n} = \lim b_{2n+1}$．(b) より $\{b_n\}$ は収束する．

別解：$n \geq m$ のとき $|a_n - a_m| < (2m+3)^{-1}$ より $\{a_n\}$ はコーシー列なので収束する（不等式は上述の単調性から従う）．

よくある間違い：$|a_n - a_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} (2k+1)^{-1}$ の右辺は $n \to \infty$ のとき発散するのでコーシー列の評価にはならない．

2　[20点] $\mathbb{R}$ 上で定義された二つの関数 $f(x), g(x)$ が $x = a$ において連続であれば $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ も $x = a$ において連続であることを示せ．

５月１１日の演習問題７の解答を参照

3 [10点+10点+10点] 以下の関数の原点における Taylor 展開を x^6 の項まで求めよ．
(i) $x\sin x$　　(ii) $\cos(x\sin x)$　　(iii) $\sqrt{\cos(x\sin x)}$

答えのみで採点 (i) $x^2 - x^4/6 + x^6/120 + O(x^8)$ (ii) $1 - x^4/2 + x^6/6 + O(x^8)$ (iii) $1 - x^4/4 + x^6/12 + O(x^8)$

4 [20点+20点] (a) $f(x)$ を閉区間 $[0,1]$ で定義された連続関数とする．f の値域 $f([0,1])$ は閉区間であることを示せ．(b) $f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で $\lim_{x\to 0} f(1/x^2) = 1$,　$\lim_{x\to 0} f(-1/x^2) = 0$ をみたすものとする．f の値域 $f(\mathbb{R})$ は開区間 $(0,1)$ を含む有界な区間であることを示せ．

(a) 最大最小値の存在定理より閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 f は最大値 M と最小値 m をもつ．$M = f(a), m = f(b)$ とすると $[a,b]$ または $[b,a]$ において中間値の定理を用いると f は $[m,M]$ 内のすべての値をとることが分かる．よって $f([0,1]) = [m,M]$．

(b) 任意の $c \in (0,1)$ にたいし $f(x)$ の ∞ での極限での条件から $f(x) > c$ とみたす x と $-\infty$ での極限の条件から $f(y) < c$ を満たす y が存在する．閉区間 $[y,x]$ で中間値の定理を用いれば $f(z) = c$ をみたす $c \in [y,x]$ の存在がわかる．よって $(0,1) \subset f(\mathbb{R})$．次に有界性を示す．$\pm\infty$ での収束の条件より $\varepsilon = 1$ ととればある $\delta > 0$ が存在して $|x| < \delta$ ならば $|f(1/x^2) - 1| < 1$ かつ $|f(-1/x^2)| < 1$．よって $|y| > \delta^{-2}$ のとき $|f(y)| < 2$．一方 (a) と同様に $|y| \leq \delta^{-2}$ では $f(y)$ は有界である．この二つの場合をあわせると $f(\mathbb{R})$ が有界であることが分かる．

(b) 別解: $g(x) = f(\tan x)$ とおけば $g(x)$ は $(-\pi/2, \pi/2)$ 上の連続関数であり，両端で $g(-\pi/2) = 0$, $g(\pi/2) = 1$ とおけば g は閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上の連続関数に拡張できる．(a) により $g([-\pi/2, \pi/2])$ は 0 と 1 を含む閉区間である．とくに $f(\mathbb{R}) \subset g([-\pi/2, \pi/2])$ は有界．また g の両端での値が $\{0,1\}$ であることを用いると $f(\mathbb{R}) \supset g((-\pi/2, \pi/2)) \supset (0,1)$．