

数学I演習 第8回 2007年10月16日配布

担当 平地健吾, TA 三角 淳

演習問題は <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/> からダウンロードできます。講義メモも載せています。

例題. \mathbb{R} 上の微分可能な関数 f について f' が有界であれば f は一様連続であることを示せ。

以下の問題をできる範囲で解き, 10月23日13時までにアドミンストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること。

[1] A, B を上に有界な \mathbb{R} の部分集合とする. 以下のことを示せ.

- (1) $\sup\{ax \mid x \in A\} = a \sup A \quad a > 0$
- (2) $\sup\{x + y \mid x \in A, y \in B\} = \sup A + \sup B$
- (3) $-\inf\{-x \mid x \in A\} = \sup A$

[2] f を半開区間 $[a, b)$ 上で一様連続な関数とする. 次を示せ.

(1) b に収束する $[a, b)$ 内の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である (よって $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ が存在する.)

(2) b に収束する $[a, b)$ 内の任意の数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n).$$

(3) b での左極限 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ が存在する.

[3] 次のすべての条件を満たす \mathbb{R} 上の実数値関数 $f(x)$ は存在するか. もし存在するならば, 例を挙げ, その例が以下の条件を確かに満たしていることを証明せよ. 存在しないならば, 存在しないことを証明せよ.

- (1) $f(x)$ は \mathbb{R} 上一様連続である.
- (2) $f(x)$ は \mathbb{R} 上微分可能である.
- (3) 集合 $\{f'(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ は有界ではない.