数学I演習解答例　第8回　2007年10月16日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[1] 上に有界の仮定より $\sup A \equiv u < \infty$, $\sup B \equiv v < \infty$ が存在する。上限の定義より以下が成り立つ。

$$\begin{array}{rl} (i) & \forall x \in A, \quad x \le u. \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad s.t. \quad x > u - \varepsilon. \\ (iii) & \forall y \in B, \quad y \le v. \\ (iv) & \forall \varepsilon > 0, \quad \exists y \in B, \quad s.t. \quad y > v - \varepsilon. \end{array}$$

(1) (i) より $\forall x \in A$, $ax \le au$。また $\forall \varepsilon > 0$ に対して、(ii) より $\exists x \in A$, s.t. $x > u - \frac{\varepsilon}{a}$。すなわち $ax > au - \varepsilon$。これより左辺の sup は au に等しい。

(2) (i), (iii) より $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x + y \le u + v$。また $\forall \varepsilon > 0$ に対して、(ii), (iv) より $\exists x \in A$, $\exists y \in B$, s.t. $x > u - \frac{\varepsilon}{2}$, $y > v - \frac{\varepsilon}{2}$。すなわち $x + y > u + v - \varepsilon$。これより左辺の sup は $u + v$ に等しい。

(3) (i) より $\forall x \in A$, $-x \ge -u$。また $\forall \varepsilon > 0$ に対して、(ii) より $\exists x \in A$, s.t. $-x < -u + \varepsilon$。これより左辺の inf は $-u$ に等しい。

[2] $\varepsilon > 0$ を任意にとる。このとき一様連続の仮定より $\delta > 0$ が存在して、$x, y \in [a, b)$ が $|x - y| < \delta$ をみたすならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つ。

(1) $\{x_n\}$ は収束する事より Cauchy 列。ゆえに上と同じ δ に対して、$N = N(\delta) = N(\varepsilon)$ が存在して、$n, m > N$ ならば $|x_n - x_m| < \delta$ をみたす。ゆえに $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ となる。ε は任意だったから、$\{f(x_n)\}$ は Cauchy 列。

(2) (1) より両辺の極限はそれぞれ存在する。$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = b$ より、冒頭と同じ δ に対して、$N = N(\delta) = N(\varepsilon)$ が存在して、$n > N$ ならば $|x_n - b| < \frac{\delta}{2}$ かつ $|y_n - b| < \frac{\delta}{2}$ をみたす。このとき $|x_n - y_n| \le |x_n - b| + |y_n - b| < \delta$。これより $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$。$\varepsilon$ は任意だったから、$\lim_{n\to\infty}\{f(x_n) - f(y_n)\} = 0$ となり題意が従う。

(3) (2) で示された共通の極限を α とおく。$\lim_{x\to b-0} f(x) = \alpha$ となる事を示す。もし不成立と仮定すると、$\varepsilon_1 > 0$ が存在して、任意の $\delta > 0$ に対して、$x \in (b-\delta, b)$ で $|f(x) - \alpha| \ge \varepsilon_1$ をみたすようなものが存在する。このとき特に $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると、$z_n \in (b - \frac{1}{n}, b)$ が存在して $|f(z_n) - \alpha| \ge \varepsilon_1$ をみたす。$z_n \in (b - \frac{1}{n}, b)$ より、$\lim_{n\to\infty} z_n = b$ となり、(2) より $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$。これは任意の n で $|f(z_n) - \alpha| \ge \varepsilon_1$ となる事に矛盾する。

[3]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

とすると条件 (1)〜(3) をみたす。実際、演習問題第 5 回 [3] のときと同様にして f は $\mathbb{R}$ 上で微分可能。また、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f'(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}) = -\sqrt{8n\pi}$ だから f' は非有界。

f の一様連続性について示す。$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ だから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $K > 0$ が存在して、$|x| > K$ ならば $|f(x)-1| < \varepsilon$ をみたす。いま、f は連続ゆえ閉区間 $[-K-1, K+1]$ 上において一様連続である。よって上と同じ $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、$x, y \in [-K-1, K+1]$ が $|x-y| < \delta$ をみたすならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となる。ここで、上の δ は $\delta \in (0,1)$ であるとしてよい。$x, y \in \mathbb{R}$ が $|x-y| < \delta$ をみたしているとすると、「$x, y \in [-K-1, K+1]$」, または「$|x|, |y| > K$」のうち少なくとも一方が成立する。$|x|, |y| > K$ の場合について考えると、$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - 1| + |f(y) - 1| < 2\varepsilon$。以上より f は $\mathbb{R}$ 上で一様連続。

・[2] では f は $x = b$ においては定義されていないので、$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(b)$ のような変形はできません。

・[3] の f は他にもいろいろな与え方が可能です。与えた関数が確かに条件をみたしている事にはきちんとした説明が必要です。

(解答例作成：三角)