数学 I 演習解答例　第 7 回　2007 年 7 月 3 日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[1] x, y を $f(D)$ の元で、$x < y$ なるものとする。このとき、任意の $w \in (x, y)$ に対して、$w \in f(D)$ が示されればよい。x, y の与え方から、適当な $u, v \in D,\ u \neq v$ が存在して $f(u) = x,\ f(v) = y$ をみたしている。この u, v に対して、D が連結である事から、連続写像 $\gamma : [0, 1] \to D$ で $\gamma(0) = u,\ \gamma(1) = v$ であるようなものが存在する。

いま、γ, f は連続より、その合成写像 $f \circ \gamma$ は $[0, 1]$ から $\mathbb{R}$ への連続関数となる。$f \circ \gamma(0) = x,\ f \circ \gamma(1) = y$ だから、中間値の定理より、上で与えた w に対して、$f \circ \gamma(a) = w$ をみたすような $a \in (0, 1)$ が存在する。このとき $\gamma(a) \in D,\ f(\gamma(a)) = w$ ゆえ、$w \in f(D)$ となり、$f(D)$ は区間である。

[2] $(x, y) \neq (0, 0)$ においては、$f_x = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ が存在して、$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の連続関数になっている。f_y についても同様。これより特に全微分可能。$(x, y) = (0, 0)$ のときを考えると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

より、原点においても全微分可能。また、特に $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$。

次に、f が C^1-関数かどうかを調べるには $f_x,\ f_y$ の連続性をみればよいが、

$$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to0} f_x(x, y)\} = \lim_{x\to0}\{2x \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}\}$$

で右辺第二項の極限は存在しないから f_x は原点で連続でない。よって f は C^1-関数でない。

[3]

$$\begin{aligned}
I(x, y, z) &\equiv \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(y) & g_2(y) & g_3(y) \\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix} \\
&= f_1(x) \begin{vmatrix} g_2(y) & g_3(y) \\ h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix} - f_2(x) \begin{vmatrix} g_1(y) & g_3(y) \\ h_1(z) & h_3(z) \end{vmatrix} + f_3(x) \begin{vmatrix} g_1(y) & g_2(y) \\ h_1(z) & h_2(z) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

と余因子展開すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} I(x, y, z) &= {f_1}'(x) \begin{vmatrix} g_2(y) & g_3(y) \\ h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix} - {f_2}'(x) \begin{vmatrix} g_1(y) & g_3(y) \\ h_1(z) & h_3(z) \end{vmatrix} + {f_3}'(x) \begin{vmatrix} g_1(y) & g_2(y) \\ h_1(z) & h_2(z) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} {f_1}'(x) & {f_2}'(x) & {f_3}'(x) \\ g_1(y) & g_2(y) & g_3(y) \\ h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

同様に y, z でも微分する事により、

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} I(x,y,z) = \begin{vmatrix} {f_1}'(x) & {f_2}'(x) & {f_3}'(x) \\ {g_1}'(y) & {g_2}'(y) & {g_3}'(y) \\ {h_1}'(z) & {h_2}'(z) & {h_3}'(z) \end{vmatrix}.$$

[4] $P = (x, y, z)$ とおく。f は全微分可能より、

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \phi(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

とかける。但し、ϕ は $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x, y) = 0$ をみたす関数とする。ここで、

$$\begin{aligned} |P - P_0| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \\ |P - Q| &= \frac{|f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0)|}{\sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}} \end{aligned}$$

であり、上の事とあわせて考えると、

$$\begin{aligned} \frac{|P - Q|}{|P - P_0|} &= \frac{|f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0)|}{\sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \\ &= \frac{|\phi(x, y)|\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \\ &\leq |\phi(x, y)| \to 0 \qquad (P \to P_0) \end{aligned}$$

となり題意が成り立つ。

・[1] で、写像 γ は D 上の2点を与えるごとに定義されるもので、最初から[0,1] から D への「よい写像」γ が 1 つ存在しているのとは意味が異なります。なお、解答例の中では「連続写像の合成が連続写像」の部分の証明は省略しましたが、基本的に 1 変数関数の場合と同様に確かめられます。($\varepsilon - \delta$ 論法で、距離の書き方が変わるだけです。)

・[2] で、一般に偏微分 f_x, f_y が存在しても全微分可能かどうか分かりません。f_x, f_y が存在して、少なくともどちらかが連続であれば全微分可能です。(逆は不成立)

・[3] はより一般に $n \times n$ 行列の n 階微分でも考えられます。本問の 3×3 の場合なら行列式を直接計算してもそれほど手間はかかりません。

・[4] で、ベクトル $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ が平面 L と直交している事に着目すれば、$|P - Q|$ の計算の確認の際に多少見通しが良くなります。

(解答例作成：三角)