数学I演習 (補足)　2007年7月19日配布

担当 平地健吾，TA 三角 淳

演習問題は http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/ からダウンロードできます．講義メモも載せています．

[**1**] (a) $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 関数とする。f のグラフ $G=\{(x,y,f(x,y)):(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ の点 $P\in G$ での接平面に直交する P を通る直線を求めよ (これを P での法線とよぶ).

(b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ を C^1 関数で任意の t に対して $g(t)\in G$ かつ $g(0)=P\in G$ をみたすとする。このとき $\dfrac{dg}{dt}(0)\in\mathbb{R}^3$ は G の P での法線に直交することを示せ。

[**2**] 3次元空間 $\mathbf{R}^3$ において原点 O から (x,y,z) までの距離 r と角 $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,\pi]$ をもちいて次のように極座標を定義する：

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

(a) ラプラシアン $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ は極座標 (r,θ,φ) で

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

と書けることを示せ.

(b) r にのみ依存する関数 $f(x,y,z)=g(r)=g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ が $r>0$ において $\Delta f=0$ をみたすのは

$$g(r)=a+\frac{b}{r}\quad (\text{ここで } a,b \text{ は定数})$$

の場合に限ることを示せ．[ヒント:$g(r)=h(r)r^{-1}$ とおき h に関する条件を求めよ．]

[**3**] $\cos(\sqrt{x^2+y^2})$ の $(x,y)=(0,0)$ でのテイラー展開を x,y について4次数まで求めよ (すなわち剰余項が $(\sqrt{x^2+y^2})^4R(x,y)$ ただし $\lim_{(x,y)\to(0,0)}R(x,y)=0$ の形)。

[**4**] 次の関数の極値を求めよ．またそれらが最大，最小値を与えるかを調べよ．

(a) $f(x,y)=(x+y)e^{-x^2-y^2}$　　(b) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$