数学I演習　第6回　2007年6月19日配布

担当 平地健吾，TA 三角 淳

演習問題は http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/ からダウンロードできます．講義メモも載せています．

以下の問題をできる範囲で解き，６月２６日１３時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること．

例題 $f(x)$ を $(-1,1)$ で定義された C^n 関数とする。$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}a_jx^j+O(x^n)$ のとき $F(x)=\int_0^x f(y)dy$ の $x=0$ での $n+1$ 次までの Taylor 展開は

$$F(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}a_jx^{j+1}+O(x^{n+1})$$

である。(例 $(\tan^{-1}x)'=(1+x^2)^{-1}$ を用いて $\tan^{-1}x$ の Taylor 展開を求める)

[**1**] 漸近解析を利用して以下の関数の原点における Taylor 展開を求めよ。

(i) $e^x\sqrt{1-x}$　　(x^3 の項まで)

(ii) $\sqrt{\cos x}$　　(x^4 の項まで)

[**2**] 次の関数の原点における 10 次の微分係数 $f^{(10)}(0)$ を求めよ.

$$f(x)=\log\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

[**3**] f を $(0,\infty)$ で微分可能な関数とする。ある正の実数 c が存在して、任意の実数 $x\in(0,\infty)$ に対して、$|f'(x)|\geq c$ を満たすならば、$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であるかまたは $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ であることを示せ。

[**4**] $f(x)$ は (a,b) で連続かつ $(a,c)\cup(c,b)$ において微分可能とする。$\lim_{x\to c}f'(x)$ が存在すれば f は c においても微分可能であることを示せ。