数学I演習解答例　第6回　2007年6月19日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[**1**] (i) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + O(x^4)$ より、

$$e^x\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{13}{48}x^3 + O(x^4).$$

(ii) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ より、

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + O(x^6).$$

[**2**] $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + O(t^6)$ に $t = x^2, -x^2$ を代入したものを考えて計算する事により、

$$f(x) = \log(1+x^2) - \log(1-x^2) = 2x^2 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^{10} + O(x^{12}).$$

x^{10} の係数部分に着目して、$f^{(10)}(0) = 10!\dfrac{2}{5}$ が分かる。

[**3**] 任意の $x > 1$ に対して、平均値の定理より $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(t)$ をみたすような $t \in (1, x)$ が存在する。このとき

$$|f(x)| + |f(1)| \geq |f(x) - f(1)| = |f'(t)(x-1)| \geq c|x-1| \to \infty \quad (x \to \infty)$$

より、$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$ が分かる。

いま、「任意の $M > 0$ に対して、$f(u)$ と $f(v)$ が反符号であるような $u, v > M$ が存在する」と仮定すると、f は連続関数だから、中間値の定理より u, v 間の点 w で $f(w) = 0$ となるようなものが存在するが、これは $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$ に矛盾する。よってある $M > 0$ が存在して、$f(x)$ は $x > M$ において常に同符号。従って $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ または $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ が成り立つ。

[**4**] $\lim_{x\to c} f'(x) = \alpha$ とする。任意の $t \in (a, c) \cup (c, b)$ に対して、平均値の定理より c, t 間に点 $u = u(t)$ が存在して $\dfrac{f(t) - f(c)}{t - c} = f'(u)$ をみたす。$t \to c$ のとき $u \to c$ だから、$\displaystyle\lim_{t\to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = \lim_{u\to c} f'(u) = \alpha$。よって、$f$ は c においても微分可能で $f'(c) = \alpha$ となる。

・[2] は他の Taylor 展開を用いた計算方法でもできます。直接計算はしないようにしましょう。

• [3] では、前回もみたように $f'(x)$ が連続関数である保証はありません。従って、$|f'(x)| \geq c$ の仮定からただちに「$\forall x,\ f'(x) \geq c$」または「$\forall x,\ f'(x) \leq -c$」とはならない事に注意が必要です。

また、$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$ がいえたとして、これだけではまだ結論が示された事にはなりません。解答例の後半では、f が $x \to \infty$ のときに「振動しない」事を $f(x)$ の連続性に着目して証明しています。

(解答例作成：三角)