数学I演習　第５回　2007年６月５日配布

担当 平地健吾，TA 三角 淳

演習問題は`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/` からダウンロードできます．講義メモも載せています．

以下の問題をできる範囲で解き，６月１２日１３時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること．解答には A3 または A4 版の用紙を用いて，氏名と学籍番号と出題日を一枚目に明記し，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めること．

例題 $f(x)$, $g(x)$ が微分可能であり $f(x) > 0$ がなりたつとき f^g の微分を求めよ。

今日の演習では高校で習った指数関数、対数関数、三角関数などの微分を用いてもよい。

[1]　次の関数の導関数を求めよ。(ii) は n 次導関数を求めよ。

(i) x^{x^x} $\qquad (x > 0)$

(ii) $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ $\qquad (b^2 - 4ac \geq 0)$

[2] (a) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能とする。この時、

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ s.t.\ \ 0 < h < \delta, 0 < k < \delta \Rightarrow \Big| \frac{f(a+h) - f(a-k)}{h+k} - f'(a) \Big| < \varepsilon$$

であることを示せ。

(b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ が存在しても $f(x)$ が $x = a$ で微分可能とは限らないことを示せ。

[3] 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}) + x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

によって定義する。

(a) f は全ての点で微分可能であることを示せ。

(b) $f'(0) > 0$ であるが、どのような $\varepsilon > 0$ をとっても $f(x)$ は $(-\varepsilon, \varepsilon)$ において単調増加ではないことを示せ。