数学I演習解答例　第５回　2007年６月５日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[1] (i) $f(x)=x^x$ とおくと、$\log f(x)=x\log x$ で、両辺を x で微分する事により $f'(x)=x^x(1+\log x)$ を得る。次に、$g(x)=x^{x^x}$ とおくと、$\log g(x)=x^x\log x$ で、両辺を x で微分して上の結果を用いれば、$g'(x)=x^{x^x}x^x\{(1+\log x)\log x+\frac{1}{x}\}$ を得る。

(ii) ここでは $a\neq 0$ の場合について計算する。$f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)}$ とかける。但し $\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,　$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

$b^2-4ac>0$ のときは、$f(x)=\frac{1}{a(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)$ より、$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{a(\alpha-\beta)}\left\{\frac{1}{(x-\alpha)^{n+1}}-\frac{1}{(x-\beta)^{n+1}}\right\}$。

$b^2-4ac=0$ のときは、$f(x)=\frac{1}{a(x-\alpha)^2}$ より、$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n+1)!}{a(x-\alpha)^{n+2}}$。

[2] (a) 仮定より、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}=f'(a)$ が存在する。すなわち、任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して、$0<|x|<\delta$ ならば $\displaystyle\left|\frac{f(a+x)-f(a)}{x}-f'(a)\right|<\varepsilon$ をみたす。このとき任意の $h,k\in(0,\delta)$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k}-f'(a)\right|\\
\leq\ &\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h+k}-\frac{h}{h+k}f'(a)\right|+\left|\frac{f(a)-f(a-k)}{h+k}-\frac{k}{h+k}f'(a)\right|\\
=\ &\frac{h}{h+k}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|+\frac{k}{h+k}\left|\frac{f(a)-f(a-k)}{k}-f'(a)\right|\\
<\ &\frac{h\varepsilon}{h+k}+\frac{k\varepsilon}{h+k}=\varepsilon
\end{aligned}$$

となるから題意が成り立つ。

(b) 例えば $f(x)=|x|$ とすれば、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=0$ だが、$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。反例は他にもいろいろ考えられる。

[3] (a) $x\neq 0$ においては、$f(x)$ は微分可能な関数 $(\sin x, x^{-2}$ など$)$ の和や積、合成関数を用いて与えられている事から微分可能で、特に $f'(x)=2x\sin(x^{-2})-2x^{-1}\cos(x^{-2})+1$。

$x=0$ のときを考えると、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\{h\sin(h^{-2})+1\}=1$$

より原点でも微分可能で、特に $f'(0)=1$。

(b) $f'(0)>0$ は上で示した。いま任意の $\varepsilon>0$ に対して、$n>\frac{1}{2\pi\varepsilon^2}$ をみたすような自然数 n を選んで $a=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ とおく。このとき $a\in(0,\varepsilon)$ であり、また $f'(a)=1-\sqrt{8n\pi}<0$ となるから、$f(x)$ は $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上で単調増加でない。

・[1] (ii) は、2 次方程式が重解を持つかどうかで場合分けが必要です。

・[3] (a) で、$f(x)$ が $x \neq 0$ で微分可能、かつ $x \in \mathbb{R}$ で連続であっても、原点での微分可能性に関する情報は分かりません。また、一般に全ての点で $f'(x)$ が存在したとして、それが x の連続関数になるとは限りません (本問は不連続なケースです)。

(解答例作成：三角)