数学I演習　第4回　2007年5月22日配布

担当 平地健吾，TA 三角 淳

以下の問題をできる範囲で解き，6月5日13時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること．解答にはA3またはA4版の用紙を用いて，氏名と学籍番号と出題日を一枚目に明記し，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めること．

講義では実数を公理を用いて定義したが、実数が存在するかということには言及していない．この演習問題では、Dedekindのアイディアに従い、有理数から実数を構成する方法を説明する．以下では有理数 $\mathbb{Q}$ の性質 (四則演算、大小関係) は既知とする．(有理数の存在については言及しない.）

有理数の空でない二つの部分集合 A, A' で

(i) A, A' は $\mathbb{Q}$ の分割である、すなわち $A \cap A' = \emptyset$ かつ $A \cup A' = \mathbb{Q}$

(ii) $a \in A,\ a' \in A'$ であれば $a < a'$

(iii) A は最大の数を持たない、すなわち $r \in A$ ならば $s > r$ となる $s \in A$ が存在する

を満たすものを**有理数の切断**とよび $\langle A, A'\rangle$ と書く.

定義. 有理数の切断を**実数**とよび、実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く.

問1 (実数の中の有理数の作り方) 有理数 $p \in \mathbb{Q}$ に対し $A = \{a \in \mathbb{Q} : a < p\}$, $A' = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq p\}$ とおけば $\langle A, A'\rangle$ は有理数の切断であること確かめよ．このような切断は有理数 p に等しいといい $\langle A, A'\rangle = p$ と書く.

問2 ($\sqrt{2}$ の作り方) $A' = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \geq 2$ かつ $a > 0\}$, $A = \mathbb{Q} \setminus A'$ (A' に含まれな有理数全体) とおく.

(a) $\langle A, A'\rangle$ は有理数の切断であることを示せ．この実数 $\langle A, A'\rangle$ を $\sqrt{2}$ と書く.

(b) A' には最小数が存在しないことを示せ．(よって $\sqrt{2}$ はどの有理数とも等しくない.)

問3（実数の大小関係） 実数 $\alpha = \langle A, A'\rangle$, $\beta = \langle B, B'\rangle$ に対し $A \subset B$ が成り立つとき $\alpha \leq \beta$ と書くことにする．また $\alpha \leq \beta$ かつ $\alpha \neq \beta$ であるとき $\alpha < \beta$ と書く.

(a) $\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \alpha$ であれば $\alpha = \beta$、また $\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \gamma$ であれば $\alpha \leq \gamma$ であることを示せ.

(b) $\alpha < \beta$ であれば $\alpha < p < \beta$ となる有理数 p が存在することを示せ．これを有理数の**稠密性**という.

問4 (実数の切断) 実数 $\mathbb{R}$ の空でない二つの部分集合 Γ, Γ' が $\mathbb{R}$ の分割であり、上述の(ii),(iii) を満たすとき、$\langle \Gamma, \Gamma'\rangle$ を**実数の切断**という．このとき Γ' には最小数が存在することを示せ (すなわち、ある $\alpha \in \Gamma'$ をとれば $\Gamma' = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta \geq \alpha\}$ である)．これを**実数の連続性**という.（金子晃先生の本のの定理5.3参照）

演習問題はこれで終わりですが、実数はまだ完成していません．実数の演算（和、積）を定義し、実数の公理を満たすことを確かめる必要があります．これに興味がある人は、例えば、小平邦彦：解析入門 (岩波書店) の第1章を参照してください．ただし、これらの話題は講義では扱いません.