数学 I 演習解答例　第４回　 2007 年 5 月 22 日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

今回分は 2003 年度 TA の竹内さんの解説で、*部分を三角が補足しました。

問１ (実数の中の有理数の作り方)

(i) $A \cap A' \neq \emptyset$ と仮定します。すると $a < p$ かつ $a \geq p$ となる有理数 a が存在することになり、$a < a$ となるので矛盾です。 $A \cup A' = \mathbb{Q}$ であることは次のようにすればよいでしょう。（他にもやり方はあります。）まず $A \subset \mathbb{Q}$,$A' \subset \mathbb{Q}$ ですから、$A \cup A' \subset \mathbb{Q}$ であることがわかります。一方、任意の有理数 a は $a < p$ または $a \geq p$ のいずれか一方を満たしますから、 $\mathbb{Q} \subset A \cup A'$ がわかります。あわせて $A \cup A' = \mathbb{Q}$ となります。

(ii) 任意の $a \in A$ と任意の $a' \in A'$ に対して、$a < p \leq a'$ ですから $a < a'$ を得ます。記号を使えばもっと簡潔に書けますので、積極的に使うことをお勧めします。($\forall a \in A, \forall a' \in A'$ に対して、$a < p$ かつ $p \leq a' \therefore a < a'$)

(iii) 任意に $a \in A$ を取ります。この a より大きな有理数で A に属するものを見つければよいわけですが、それは $(a+p)/2$ とすればよいでしょう。勿論他にもあります。（有理数に対しては四則演算ができますから、このような数を考えることが出来ます。また、これが a より大きく p より小さいことも有理数の大小関係からわかります。）背理法でやってもできます。A に最大数が存在すると仮定して、それを m とおきます。$(m+p)/2$ を考えると $a < (m+p)/2 < p$ が成り立ちます。このことは a より大きな有理数が A 内に見つかったことを意味し、a が A の最大数であることに反します。いずれの方法で証明するにしても、「ふたつの有理数の間に有理数が存在する」ことをきちんと示さなければいけません。この問題で何が言いたいのかは題名が示している通りですが簡単に説明してみます。

我々は有理数の存在や性質（四則演算で閉じていること、大小関係を考えることができること）のみを認めた上で、「実数」と呼ぶに相応しいものを構成したいわけです。その構成のやり方はいろいろありますが、ここでは「しかるべき性質 (i)(ii)(iii) を満たす、有理数の集合のペア」として定義する方法をとっています。この集合のペア一つ一つを「実数」と呼ぶことにします。これでは単なる集合のペアなので我々が頭にイメージする「実数」とは程遠い気がします。しかし、有理数だけで作ってあるので、その存在は明確です。問題なのは、このただの集合のペアが「実数」と呼ぶに相応しいかどうかです。この定義だけでは単なる集合のペアに過ぎません。そこで、このペアを集めたものにいろいろな「構造」（大小関係、足し算、掛け算などいろいろ）を入れることで、「実数」と呼ぶに相応しい数学的実体を作り上げていきます。「構造」を入れる前にまず考えておきたいことがあります。それは「有理数が実数に含まれているべきである」ということです。有理数を含まない「実数」を作っても全然嬉しくありません。ところが、「実数」は「有理数の集合のペア」として定義してあるので、有理数というただの数が「実数」の集合に含まれるわけがありません。どうすればよいのでしょうか？答えは問題１の通りです。まず p という有理数に対して、問題１にある集合のペア $\langle A, A' \rangle$ を対応させます。そして、この $\langle A, A' \rangle$ を「有理数」と呼んでやることで、実数の中に有理数があるとみなすわけです。「有理数」という漢字３文字に２つの実体（既知の数、集合のペア）を対応させることになりますから、混乱すると想います。このような同一視は数学では頻繁に出てきます。今は変な感じするでしょうが、じきに慣れます。今回の演習問題において以後「有理数 p」といった場合、それは既知としている有理数 p そのもののことなのか、それとも、有理数 p に問題１の方法で対応させた集合のペアを「有理数 p」と呼んで

いるのかをはっきり区別しておくことが初めの内は混乱を避けるために必要です。例えば問題2の A や A' に使われている $a, p, 2$ といったものは前者ですが、問題3で使われている有理数 p とは後者の意味です。さて、問題1を解決した今、取り敢えず、有理数を含んでいる新しい対象を手にしたことになります。今はまだ単なる集合のペアの集まりですから、まだ実数と呼ぶに相応しくありません。以下の問題＋参考文献を通して、この新しい数学的対象（集合のペア）を実数と呼びたくなるはずです。

問2 ($\sqrt{2}$ の作り方) まだ実数に対して四則演算、大小関係は定義していないで、「$A' = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq \sqrt{2}\}$ と書ける。」であったり、「a を $a^2 = 2$ を満たす実数とする」といったことは意味をなしません。この問題に登場する $\sqrt{2}$ は単なる集合のペアにつけた名前です。

(a) *(i) $A \cap A' \neq \emptyset$ と仮定すると、$a \in A \cap A'$ が存在して、$a \notin A'$ かつ $a \in A'$ となり矛盾する。次に、$A, A' \subset \mathbb{Q}$ より $A \cup A' \subset \mathbb{Q}$。また, $a \in \mathbb{Q}$ とすると、「$a \notin A'$ であれば $a \in A$」となるから、$a \in A'$ または $a \in A$ である。よって $\mathbb{Q} \subset A \cup A'$。従って $A \cup A' = \mathbb{Q}$ となる。

*(ii) $a \in A,\ a' \in A'$ とするとき、「$a^2 < 2$ または $a \leq 0$」かつ「$(a')^2 \geq 2$ かつ $a' > 0$」が成り立つ。$a \leq 0$ のときは、$a \leq 0 < a'$。また $a^2 < 2$ かつ $a > 0$ のときは、もし $a \geq a'$ であれば $2 > a^2 \geq (a')^2 \geq 2$ より矛盾。よって $a < a'$ となる。

(iii)A に最大数が存在しないことを示すには、任意の $a \in A$ に対して、$a < r$ なる $r \in A$ を見つければよいわけです。

任意に $a \in A$ を取ります。$a > 0$ の場合を考えれば十分です。この a に対して、十分小さな有理数 d を取れば $(a+d)^2 < 2$ とでき、これで A は最大数を持たないことが示せますが、「$a^2 < 2$ の時、$(a+d)^2 < 2$ となる d はどうやってみつければよいか」という疑問が残ります。以下のようにすれば見つけられます。

$a^2 < 2, a > 0$ に対して $(a + \frac{1}{n})^2 < 2$ を満たす自然数 n を見つければ十分なのですが、$(a + \frac{1}{n})^2 < 2 \Leftrightarrow a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \Leftrightarrow \frac{2na+1}{n^2} < 2 - a^2 \cdots$ (1) ですから、結局最後の不等式を満たす自然数 n を見つけることができればよいことになります。n を $1 < na$ となるようにとれば $\frac{2na+1}{n^2} < \frac{2na+na}{n^2} = \frac{3a}{n}$ となりますから、(1) を満たすためには $\frac{3a}{n} < 2 - a^2 \Leftrightarrow \frac{3a}{2-a^2} < n$ とすれば十分です。結局 n を $n > \max\{\frac{1}{a}, \frac{3a}{2-a^2}\}$ とすれば (1) が、従って、$(a + \frac{1}{n})^2 < 2$ が成り立つことになります。

(b) 背理法で証明します。A' が最小数を持つと仮定し、それを m とします。$m^2 \geq 2$ です。いま $m^2 > 2$ とすると、上と同様に考えれば $(m - \frac{1}{n})^2 > 2$ を満たす自然数 n が見つかってしまい、m が A' の最小数であることに反します。従って $m^2 = 2$ となりますが、このような有理数は存在しません。従って、A' は最小数を持ちません。背理法に頼らなくてもできます。「$A' = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2 \text{ かつ } a > 0\}$ である。（$a \geq 2$ の符号をとってよい。$a^2 = 2$ なる有理数は存在しないから。）任意の $a \in A'$ に対して、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$(a - \frac{1}{n})^2 > 2$ とできる。これは a より小さい有理数で A' に含まれるものが存在することを意味している。つまり、A' に最小数は存在しない。」

問題文にも書いてある通り、この問題でわかったことは「どんな有理数とも等しくない実数が存在する」ということです。実数の中に有理数を作る方法は問題1にありましたが、そこで登場する A' は最小数を持っていることに注意して下さい。

問3（実数の大小関係） 実数の大小関係は、実数を定義する有理数の集合の包含関係で定義していますので、この定義に従って証明しなければいけません。またここで定義された大小関係は有理数

の大小関係とはさしあたり異なるので注意が必要です。つまり、有理数同士従来の意味で $a<b$ だからといって実数とみなしたとき、$a<b$ という保証はありません。(実際には実数と見ても $a<b$ が成り立つことがちゃんと証明できます。)

*(a) $\alpha=\langle A,A'\rangle$, $\beta=\langle B,B'\rangle$, $\gamma=\langle C,C'\rangle$ とする。まず、$\alpha\leq\beta$ かつ $\beta\leq\alpha$ ならば、$A\subset B$ かつ $B\subset A$ より $A=B$。このとき $A'=B'$ でもあるので $\alpha=\beta$ となる。次に、$\alpha\leq\beta$ かつ $\beta\leq\gamma$ ならば、$A\subset B$ かつ $B\subset C$ となり、$A\subset C$ となるから $\alpha\leq\gamma$ となる。

(b) $\alpha<\beta$ だから、$A\subsetneqq B$ 従って、$p\in B\setminus A$ なる $p\in\mathbb{Q}$ が存在します。この有理数 p に対して、$C=\{a\in\mathbb{Q}|a<p\},\ C'=\{a\in\mathbb{Q}|a\geq p\}$ とすると、$\langle C,C'\rangle$ は「有理数の切断」となっています(問題1)。この切断は、よく知っている有理数 p から問題1にあるように構成した切断なので、この切断を再び(実数の中の)有理数と呼ぶことになりますから注意しましょう。この切断 $\langle C,C'\rangle$ を再び p と表わします。$\alpha<p<\beta$ であることを示せばおしまいです。これを示すには $A\subsetneqq C\subsetneqq B$ を示せばよいことになります。まず、$A\subsetneqq C$ から示します。$p\notin A$ だから $p\in A'$ 従って、任意の $a\in A$ に対して $a<p$、よって C の定義から $a\in C\ \ \therefore A\subset C$。また、$B$ が最大数を持たない事にも注意すれば $p_0<p$ であるような $p_0\in B\setminus A$ をとる事ができて、$p_0\notin A$ かつ $p_0\in C$ だから $A\neq C$。あわせて $A\subsetneqq C$ ですから、実数の大小関係の定義により $\alpha<p$ であることがわかりました。$p<\beta$ となることも同様に示せます。以上で実数 $\alpha<\beta$ の間に有理数 p が存在することがわかりました。

この問題で「実数に大小関係が入り、反対称律、推移律が成立する」ことがわかりました。他にも反射律「$a\leq a$」、全順序性「$a\leq b$ または $b\leq a$ の少なくとも一方が成立」などを示すことが残っています。興味のある人は証明してみて下さい。

問4(実数の切断) この問いの解説は「小平邦彦:解析入門17ページ定理1・6」を参照して下さい。

*(証明の流れは以下の通り。まず $A=\Gamma\cap\mathbb{Q}$, $A'=\Gamma'\cap\mathbb{Q}$ とおくと、問3 (b) の結果を用いる事により A は最大数を持たない事が分かる。よって $\alpha=\langle A,A'\rangle$ は有理数の切断であり、$\alpha\in\Gamma$, $\alpha\in\Gamma'$ のいずれかが成り立つ。ここで一般に、「任意の実数 $u=\langle U,U'\rangle$ に対して、$U=\{a\in\mathbb{Q}:a<u\}$, $U'=\{a\in\mathbb{Q}:a\geq u\}$」である事にも注意する。(参考文献の定理1.3。これも確かめる事が必要。) もし $\alpha\in\Gamma$ とすると、上を用いて α は Γ の最大数となる事が分かり、性質 (iii) に矛盾。よって $\alpha\in\Gamma'$ となるが、この α が Γ' の最小数となっている事が上を用いて確かめられる。)