数学I演習解答例　第3回　2007年5月17日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[**1**] (a) $f(I)$ が1点集合の場合は自明。$f(I)$ が2点以上を含むとする。$y, z \in f(I)$, $y < z$ を任意に与えたとき、適当な $u, v \in I$, $u \neq v$ に対して $f(u) = y$, $f(v) = z$ となっている。いま、$u < v$ としよう。このとき中間値の定理より、f は $[u, v]$ 上において $[y, z]$ 間の全ての値をとる。I は区間だから $[u, v] \subset I$ である。これより $[y, z] \subset f(I)$ となる。よって $f(I)$ は区間である。

(b) 上の結果より $f([a, b])$ は区間であり、また最大値の定理より、f は $[a, b]$ 上で最大値、最小値を持つ事から閉区間となる。

(補足) (a) では、有限もしくは無限区間の像が有限もしくは無限区間になる事の証明を与えています。演習の時間に述べたように区間として有限区間のみを考えた場合には、(b) の閉区間のケースを中間値の定理で先に示してそれに帰着させるというやり方もできます。

[**2**] (a) 最初に、f^{-1} が存在する事より、$x, y \in (a, b)$ が $f(x) = f(y)$ をみたすのは $x = y$ の場合に限られる事に注意する。背理法で題意を示す。もし f が狭義単調増大でも減少でもないと仮定すると、次が成り立つ。

(1) $p, q \in (a, b)$ が存在して、$p < q$ かつ $f(p) > f(q)$ をみたす。

(2) $r, s \in (a, b)$ が存在して、$r < s$ かつ $f(r) < f(s)$ をみたす。

このとき (1) の p, q に対して、「(a, p) 上の任意の x について $f(x) > f(p)$」、「(p, q) 上の任意の x について $f(q) < f(x) < f(p)$」、「(q, b) 上の任意の x について $f(x) < f(q)$」がそれぞれ成り立つ。実際、第一の主張がもし不成立とすれば、ある $x \in (a, p)$ が存在して $f(x) < f(p)$ となる。このとき中間値の定理より、f は $[x, p]$ 上において $f(x)$ と $f(p)$ の間の全ての値をとり、また $[p, q]$ 上において $f(p)$ と $f(q)$ の間の全ての値をとる。よって $f(y) = f(z)$ であるような $y \in [x, p)$, $z \in (p, q]$ が存在して、これは f^{-1} の存在に反する。第二、第三の主張についても同様に確かめられる。

上の主張から、(2) の r, s に対しては $r, s \in (a, p]$, $r, s \in [p, q]$,$r, s \in [q, b)$ のいずれかが成り立つ事が必要となるが、どの場合にも先ほどの方法にならって中間値の定理からそれぞれ矛盾が導かれる。

(b) f が狭義単調増大のときに示されれば十分。このとき f^{-1} も狭義単調増大となる。u を (c, d) 上の任意の点とする。このとき、左極限 $\lim_{x \to u-0} f^{-1}(x)$ と右極限 $\lim_{x \to u+0} f^{-1}(x)$ が存在する。実際、$\alpha \equiv \sup\{f^{-1}(x) : x \in (c, u)\}$ とおくと、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、上限の定義より $\alpha - \varepsilon < f^{-1}(v)$ となるような $v \in (c, u)$ が存在する。ここで $\delta = u - v$ とおけば、f^{-1} の単調性より全ての $x \in (u - \delta, u)$ に対して $\alpha - \varepsilon < f^{-1}(x)$ をみたし、このとき $|f^{-1}(x) - \alpha| < \varepsilon$ となる。よって α が求める左極限となっている。同様に、$\beta \equiv \inf\{f^{-1}(x) : x \in (u, d)\}$ とおけば、β が求める右極限となる。

いま、f^{-1} の単調性より $\alpha \leq f^{-1}(u)$ である。また、「$x \in (c, u)$ ならば $f^{-1}(x) \leq \alpha$、$x \in [u, d)$ ならば $f^{-1}(u) \leq f^{-1}(x)$」であり、f^{-1} は (a, b) 上の全ての値をとる事から $\alpha \geq$

$f^{-1}(u)$ でなければならない。従って $\alpha = f^{-1}(u)$ となる。同様に $\beta = f^{-1}(u)$ も分かる。よって f^{-1} は連続である。

[3] $c \in (a, \infty)$ が与えられたとする。このとき $a + \varepsilon < c$ をみたすような $\varepsilon > 0$ がとれる。この ε に対して、$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ の仮定から、$|f(u) - a| < \varepsilon$ をみたすような $u < 0$ が存在する。このとき特に $f(u) < a + \varepsilon < c$ である。また $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ の仮定から、$f(v) > c + 1$ をみたすような $v > 0$ が存在する。よって中間値の定理より、$f(y) = c$ をみたすような $y \in [u, v]$ が存在する。

(解答例作成：三角)