数学I演習解答例　第2回　2007年5月8日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

問1 (1) 否定命題：$x < 2$ をみたす $x \in \mathbb{R}$ で、$x^2 \geq 4$ となるものが存在する。
否定命題の証明：$x \leq -2$ であるような x を考えればよい。
(2) 否定命題：ある $y \in \mathbb{R}$ が存在して、「任意の $x \in \mathbb{R}$ について $x^2 > y$」.
否定命題の証明：$y < 0$ であるような y を考えればよい。
(3) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $y = x$ ととれば明らかに与式は成り立つから、命題は真。
否定命題：ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して $x^2 - y^2 \geq 2007$ が成り立つ。
(4) 否定命題：レポートを10枚以上書いたとしても、数学の単位をもらえない事がある。

問2 対偶を示す。$\{a_n\}$ が有界でないと仮定しよう。このとき、$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ を次のように構成できる。まず $a_{n_1} = a_1$ とする。次に a_{n_2} を、$n_2 > n_1$ かつ $|a_{n_2}| \geq |a_{n_1}| + 1$ をみたすように選ぶ。(もしこのような a_{n_2} が存在しなければ、$\{a_n\}$ は有界である。) 次に a_{n_3} を、$n_3 > n_2$ かつ $|a_{n_3}| \geq |a_{n_2}| + 1$ をみたすように選ぶ。以下同様にして $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ を定義する。このような $\{a_{n_j}\}$ に対して、その任意の部分列をあらためて $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ とかいたとき、$\{b_n\}$ は任意の n で $|b_{n+1}| \geq |b_n| + 1$ となる事より収束しない。

問3 まず一般に次が成り立つ事に注意する。

[補題] $u(x), v(x)$ を連続関数、c を定数とするとき、$u(x) + v(x), cu(x), |u(x)|$ も連続。

[証明] ここでは $|u(x)|$ についてのみ示す。$x \in \mathbb{R}$ を任意に与える。このとき u の連続性より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、$|x - y| < \delta$ をみたす全ての y に対して $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$ が成り立つ。このとき、$-|u(x) - u(y)| \leq |u(x)| - |u(y)| \leq |u(x) - u(y)|$ である事にも注意すれば $||u(x)| - |u(y)|| < \varepsilon$ となるから、$|u|$ も連続。

問3の主張は、$h(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\}$ とかける事と上の補題より従う。

問4 $f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta$ とおく。このとき任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$ となる事を示す。まず与えられた条件から、$p = 0, q = 1$ とすれば $f(2) = 2\beta - \alpha$、また $p = -1/2, q = 1/2$ とすれば $f(-1) = 2\alpha - \beta$ などが分かり、以下帰納的に $x \in \mathbb{Z}$ のときに正しい事が分かる。次に $x \in \mathbb{Q}$ のときを考える。任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\beta = f(1) = f\left(\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}\right) = \alpha + m\{f(\frac{1}{m}) - \alpha\}$$

だから $f(\frac{1}{m}) = \frac{\beta - \alpha}{m} + \alpha$ となる。これより、上のときと同様に $f(\frac{n}{m})$ ($n \in \mathbb{Z}$ は任意) の値も具体的に定まる。最後に $x \in \mathbb{R}$ のときを考えよう。有理数の稠密性より、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathbb{Q}$ 上の数列 $\{x_n\}$ が存在して $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ とできる。よってこのとき

$$f(x) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \{(\beta - \alpha)x_n + \alpha\} = (\beta - \alpha)x + \alpha$$

となり、題意が成り立つ。２番目の等号で f の連続性を用いた。

・問２では例題と異なり、部分列の収束先は常に同じ値であるとは限りません。例えば $a_n = (-1)^n$ のような場合を考えてみましょう。

・問３で、f と g の大小によって場合分けして考えようとすると、大小関係が複雑に変わるケースもあるので注意深い取り扱いが必要です。具体例としては、$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$、$f(0) = 0$、$g(x) \equiv 0$ のような場合が考えられます。

・問４では与えられた条件から f が直線になる事の見当は付きますが、x が無理数の場合も含めて、全ての x に対して $f(x)$ の値が決定される事まで確かめる必要があります。

(解答例作成：三角)