数学I演習　第１３回　2008年1月8日配布

担当 平地健吾，TA 三角 淳

演習問題は http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/ からダウンロードできます．講義メモも載せています．

例題. ε および C を正の定数とする。数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が $|a_n| + |b_n| \le \dfrac{C}{n^{2+\varepsilon}}$ をみたせば

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

は $\mathbb{R}$ 上で一様収束し、極限関数は微分可能であることを示せ。

以下の問題をできる範囲で解き, 1 月 15 日 13 時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること．

[1] $\dfrac{1}{x}$ の積分を利用して

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

の存在を示せ。この極限値をオイラーの定数という。

[2] $f_k(x) = \dfrac{x}{(1+x)^k}$ であるとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で収束するが一様収束しないことを示せ。

[3] 関数列 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ の極限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ と $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を比較せよ。

[4] (a) 数列 $\{a_n\}$ が $|a_n| \le e^{-n}$ を満たすとき

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

は $\mathbb{R}$ 上で一様収束し、$f(x)$ は C^∞ 級関数であることを示せ。

(b) 例題において $\varepsilon = 0$ とすると、極限関数は微分可能とは限らない。その例をあげよ。