数学I演習解答例　第13回　2008年1月8日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[1] $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ とおく。$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1)$ だから、$a_n > \log(n+1) - \log n > 0$。よって $\{a_n\}$ は下に有界。

また、任意の n に対して $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log \frac{n+1}{n} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx - \log \frac{n+1}{n} = 0$。よって $\{a_n\}$ は単調減少。ゆえに $\{a_n\}$ は極限値を持つ。

[2] $x = 0$ のとき $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = 0$。また $x \in (0,1]$ のとき $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{1+x})^k = 1 + x$。よって各点 x で収束している。

一方、$\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ は $[0,1]$ 上の連続関数だが、上の計算よりその極限関数は $x = 0$ で不連続となるので、一様収束していない。

[3] 任意の x を固定するごとに、$\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0$。これより $\int_0^1 f(x)dx = 0$。一方、$\int_0^1 f_n(x)dx = [-e^{-nx^2}/2]_0^1 = (1 - e^{-n})/2 \to 1/2\ (n \to \infty)$。よって極限と積分の順序交換は成立しない。

[4] (a) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ とおく。$|a_k \sin kx| \leq |a_k| \leq e^{-k}$ で、右辺は x によらず $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} < \infty$ となる事より $f_n(x)$ は一様収束する。

次に、

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx}(a_k \sin kx) = \sum_{k=1}^{n} k a_k \cos kx$$

であり、$|ka_k \cos kx| \leq ke^{-k}$、$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k} < \infty$ となる事より $\frac{d}{dx} f_n(x)$ は一様収束する。従って極限と微分の順序交換ができて、$f(x)$ は微分可能で $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos nx$ が分かる。

$f(x)$ の代わりに $f'(x)$ に対して上と同様の議論を繰り返すことにより、$f'(x)$ は微分可能で $f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin nx$ が分かる。以下帰納的に考えて $f(x)$ が C^∞ 級である事が示される。(任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=1}^{\infty} k^N e^{-k} < \infty$ が成り立つ事に注意。)

(b) n が偶数のとき $b_n = 0$、n が奇数のとき $b_n = -4/(n^2\pi)$、また $a_n \equiv 0$ とすると、極限関数は周期 2π で $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos nx = |x| - \frac{\pi}{2}\ (x \in [-\pi, \pi])$ の場合に対応しており (厳密には Fourier 解析の本などを参照)、$\varepsilon = 0$ の場合の条件をみたすが原点で微分可能でない。

・[2] で一様収束しない事の証明の部分は、

$$\sup_{0<x\leq 1} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{(1+x)^k} - (1+x) \right| = \sup_{0<x\leq 1} \frac{1}{(1+x)^n} = 1$$

が $n \to \infty$ のとき 0 に収束しない事からも直接確かめられます。今の場合、区間 $(0,1]$ 上で考えてもやはり一様収束していません。

なお上の計算で sup の範囲を $\varepsilon \leq x \leq 1$ (但し $\varepsilon \in (0,1]$ は任意) に置き直して考えれば区間 $(0,1]$ 上で広義一様収束している事が分かります。

・[2] や [4](b) で、具体例が仮に「十分条件」をみたしていなくても、結論まで実際に不成立かは別の問題として考える事が必要です。

(解答例作成：三角)