数学I演習　第１２回　2007年12月11日配布

担当 平地健吾, TA 三角 淳

演習問題は http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/sugaku-I-2007/ からダウンロードできます．講義メモも載せています．

例題. 次の等式を示せ：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-x^2y^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

演習で紹介するのは D. Zwillinger, Handbook of integration, Jones and Bartlett Publ., 1992, pp. 37–38. による恐ろしく巧妙な計算；普通は思いつかない。

以下の問題をできる範囲で解き, 12 月 18 日 13 時までにアドミニストレーション棟のレポート提出ボックスに提出すること．

[1] 以下の重積分を計算せよ

(a) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, D は $(1,1)$ を中心とるす半径 1 の円板

(b) $\displaystyle\lim_{K\to\infty}\iint_{\{x^2+y^2\le K\}}\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^3}dxdy$

[2] $u=x^2-y^2$, $v=2xy$ で与えられる xy 平面から uv 平面への写像を考える。

(a) xy 平面で 3 つの直線 $y=x$, $y=1$, $x=0$ で囲まれる領域を G とする。上の写像による G の像を求めよ。

(b) $\displaystyle\iint_G \frac{x^4-y^4+2xy(x^2+y^2)}{(1+x^2-y^2)^{1/2}}dxdy$ を求めよ。

[3] 数列 $\{a_n\}$ が $a_n>0$ を満たすとする。$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n>1$ であれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散することを示せ。(簡単すぎると思う人は極限を上極限にかえて示せ。)

[4] 次の級数は収束するか？

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+n^2}.$$