数学I演習解答例　第12回　2007年12月11日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[**1**] (a) $x = r\cos\theta + 1$, $y = r\sin\theta + 1$ と変数変換すると

$$\int\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int\int_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}} \{r^2 + 2(\sin\theta+\cos\theta)r + 2\}rdrd\theta$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\{r^2+2+2r(\sin\theta+\cos\theta)\}d\theta = \int_0^1 2\pi r(r^2+2)dr = \frac{5}{2}\pi.$$

(b) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換すると

$$\int\int_{\substack{x^2+y^2\le K\\ x,y>0}} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^3}dxdy = \int\int_{\substack{0<r\le\sqrt{K}\\ 0<\theta<\pi/2}} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{(1+r^2)^3}rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\sqrt{K}} \frac{r^3}{(1+r^2)^3}dr \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{K}} \frac{r^3}{(1+r^2)^3}dr$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^{1+K}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du = \frac{1}{8}\left(1-\frac{2}{1+K}+\frac{1}{(1+K)^2}\right) \to \frac{1}{8} \quad (K\to\infty).$$

[**2**] (a) $y = x$, $y = 1$, $x = 0$ は写像 $(x,y)\mapsto(u,v)$ によってそれぞれ半直線 $u = 0$, $v \ge 0$、放物線 $u = v^2/4 - 1$、半直線 $u \le 0, v = 0$ に移され、これらで囲まれる領域 H が G の像となる。

(b) $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2)$ だから $dudv = 4(x^2+y^2)dxdy$。これより

$$\int\int_G \frac{x^4-y^4+2xy(x^2+y^2)}{(1+x^2-y^2)^{1/2}}dxdy = \frac{1}{4}\int\int_H \frac{u+v}{(1+u)^{1/2}}dudv$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^0 du \int_0^{2\sqrt{1+u}} \frac{u+v}{(1+u)^{1/2}}dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (u+\sqrt{1+u})du = \frac{1}{12}.$$

[**3**] $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha > 1$ と仮定する。このとき $\alpha - \varepsilon > 1$ をみたすような $\varepsilon > 0$ がとれる。この ε に対して十分大きな N が存在して、$n \ge N$ ならば $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha\right| < \varepsilon$ をみたす。このとき特に $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha - \varepsilon > 1$。従って「$n \ge N \Rightarrow a_{n+1} > a_n$」$(*)$ が成り立つので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_N = \infty$$

となり与えられた正項級数は発散する。

(注) 極限を上極限に変えた場合は題意不成立でした。例えば n が奇数のとき $a_n = 1/3^{(n+1)/2}$、n が偶数のとき $a_n = 1/2^{n/2}$ とすると反例になっています。一方、極限を下極限に変えた場合について考えると、$(*)$ に対応する部分が同様に成り立ち、題意が成立します。

[4] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ より 1 番目の級数は収束する。

次に、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ は $0 < \alpha \leq 1$ のとき発散、$1 < \alpha$ のとき収束する事に注意すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \infty$ だから 2 番目の級数は発散し、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ だから 3 番目の級数は収束する。

・[3] で $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ の場合を考えると、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する場合と収束する場合があります。[4] の 2 番目と 3 番目の級数はその具体例です。

(解答例作成：三角)