数学I演習解答例　第10回　2007年11月13日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

[1] (a) 変数分離形より $\displaystyle\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int k dx$ と形式的に変形すると $\log\left|\dfrac{y}{y-1}\right| = kx + C$。よって $y = \dfrac{1}{C'e^{-kx}+1}$。また $y \equiv 0$, $y \equiv 1$ も明らかに解となる。

(b) まず $\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ を (a) と同様の方法で解くと $y = Ce^{-x}$。次に定数 C の部分をあらためて $C(x)$ で置き換えて (定数変化法)、$y = C(x)e^{-x}$ を元の方程式に代入して整理すると、$C(x) = \displaystyle\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C'$。これより $y = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x) + C'e^{-x}$。

[2] $\{P_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}^2$ に収束しているとする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して、N が存在して $n > N$ ならば $\| P_n - \alpha \| < \varepsilon$ をみたす ($\| \cdot \|$ は平面上の Euclid 距離)。これより $\{P_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ は α を含む 1 辺 2ε の正方形 L に含まれる。また各 $n = 1, \cdots, N$ に対しては、点 P_n を含むような 1 辺 $\varepsilon/\sqrt{N}$ の正方形 L_n がとれる。このとき、$A \subset L \cup (\cup_{n=1}^{N} L_n)$ かつ $|L| + \sum_{n=1}^{N} |L_n| = 4\varepsilon^2 + \varepsilon^2$ だから $|A| = 0$ となる。

また $\{P_n\}$ が収束しないとき、例えば $P_n = ((-1)^n, 0)$ とすれば A は 2 点集合ゆえ $|A| = 0$ となるが、$P_n = (n, 0)$ とすれば A は非有界となり面積確定でない。

(注) $\{P_n\}$ が有界だが面積確定でないケースも存在する。実際、$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $Q = \{(x,y) \in I : x, y \in \mathbb{Q}\}$ とおいて、Q の各元に適当な番号を付けて並べたものを $P_1, P_2, P_3, \cdots$ とする。(このような番号付けができる事については例えば集合論の本などを参照。) このとき $\{P_n\}$ は収束しない。(ある $\beta \in \mathbb{R}^2$ に収束していたとすると、N を十分大きくとれば $\{P_n\}_{n=N}^{\infty}$ は中心 β, 半径 1/3 の円 M に含まれるが、これは $I \setminus M$ 上に $\{P_n\}$ の元が無限個存在する事に矛盾する。) I の有限個の長方形による分割を Δ とするとき、どのような Δ をとっても $A(= Q)$ に含まれる小長方形の面積の和は 0、A の元を含む小長方形の面積の和は 1 となるから、A は面積確定でない。

[3] D を含む、各辺が座標軸に平行な長方形 R を 1 つ固定する。$L = \{(x,y) \in R : x = 0\}$ とおくと、L は R 内の C^1-曲線より $|L| = 0$。また仮定より $|\partial D| = 0$ で、$\partial D_+ \subset L \cup \partial D$ より、$|\partial D_+| = 0$ が分かる。同様に $|\partial D_-| = 0$。よって D, D_+, D_- は面積確定であり、特に f は D, D_+, D_- 上においてそれぞれ可積分となる。

いま、R 上の関数 $\tilde{f}$ を次のように定める。

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

R の小長方形による分割 Δ を、L が分割に用いられるようなものとし、Δ の $R_+ \equiv R \cap \{x \ge 0\}$ への制限を Δ_+、$R_- \equiv R \cap \{x \le 0\}$ への制限を Δ_- とする。また Δ_+ の部分に対

応する小長方形の全体を $E_+(\Delta)$、Δ_- の部分に対応する小長方形の全体を $E_-(\Delta)$ とし、$E(\Delta)=E_+(\Delta)\cup E_-(\Delta)$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
&\int\int_D f(x,y)dxdy \\
=&\int\int_R \tilde{f}(x,y)dxdy \\
=&\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{A\in E(\Delta)} M(f,A)|A| \\
=&\lim_{|\Delta_+|\to 0}\sum_{A\in E_+(\Delta)} M(f,A)|A| + \lim_{|\Delta_-|\to 0}\sum_{A\in E_-(\Delta)} M(f,A)|A| \\
=&\int\int_{R_+} \tilde{f}(x,y)dxdy + \int\int_{R_-} \tilde{f}(x,y)dxdy \\
=&\int\int_{D_+} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_-} f(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

となり題意が成り立つ。上で $M(f,A)$ は $\tilde{f}$ の A における上限を表す (下限に置き換えても同様)。第二と第四の等号では f の可積分性と Darboux の定理を用いた。

・[1] の微分方程式は、初期条件 $y(0)$ を与えるごとに解が一意的に定まるような「よい場合」になっています。

・[2] で L_n の 1 辺を ε のようにとると、$\sum_{n=1}^{N}|L_n|=N\varepsilon^2$ となり、N は ε に依存している (例えば $N(\varepsilon)=\varepsilon^{-3}$ かも知れない) のでうまくいきません。

(解答例作成：三角)