数学I演習解答例　第１回　2007年4月24日出題分

担当 平地健吾，TA 三角 淳

問１ 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分大きな自然数 N をとれば $1/\varepsilon < N$ とできる」事を示す。これが示されれば、$n \geq N$ のとき $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ となるから題意が成り立つ。冒頭の主張がもし成り立たないと仮定すると、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の自然数 N に対して $1/\varepsilon \geq N$ となる。これより $a_n = n$ は上に有界となり、単調増加でもあるから、与えられた公理より極限値 α が存在する。すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば $|n - \alpha| < \varepsilon$ をみたす。いま特に $\varepsilon = 1/2$ とすると、対応する N に対して $|N - \alpha| < 1/2, |N + 1 - \alpha| < 1/2$ となる。このとき、$1 = |(N + 1 - \alpha) - (N - \alpha)| \leq |N + 1 - \alpha| + |N - \alpha| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ となるので矛盾。

問２ $\{a_n\}$ が α に収束する事を (1)、問題文中の主張を (2) とする。(1)⇒(2) は、$\varepsilon < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$ より明らか。(2)⇒(1) を示そう。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\varepsilon > {\varepsilon_1}^2 + 2\varepsilon_1$ をみたすような $\varepsilon_1 > 0$ がとれる。実際、$\varepsilon \geq 1$ のときは $\varepsilon_1 = 1/3$, $\varepsilon < 1$ のときは $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$ などのように ε_1 を選べばよい。この ε_1 に対して (2) より、十分大きな $N = N(\varepsilon_1) = N(\varepsilon)$ が存在して、$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < {\varepsilon_1}^2 + 2\varepsilon_1 < \varepsilon$ とできる。ε は任意だったから、(1) が従う。

問３ 仮定より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して N が存在して、$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ かつ $|b_n - \alpha| < \varepsilon$ とできる。一方各 n に対して $a_n \leq x_n \leq b_n$ である事から、$n \geq N$ ならば $\alpha - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < \alpha + \varepsilon$、よって $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ となる。これより題意が成り立つ。

問４ $\varepsilon > 0$ を任意にとる。このとき仮定より N が存在して、$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ とできる。このような N を１つ固定し、$n \geq N$ に対して

$$
\begin{aligned}
b_n &\equiv \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \\
&= \frac{a_1 + \cdots + (N-1)a_{N-1}}{1 + \cdots + n} + \frac{N(a_N - \alpha) + \cdots + n(a_n - \alpha)}{1 + \cdots + n} + \frac{N\alpha + \cdots + n\alpha}{1 + \cdots + n} \\
&\equiv b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + b_n^{(3)}
\end{aligned}
$$

と分けて考えてみる。このとき、$N_1 = N_1(\varepsilon, N, a_1, a_2, \cdots a_{N-1})$ を十分大きくとれば、$n \geq N_1$ のとき $|b_n^{(1)}| < \varepsilon$ とできる。また、$n \geq N$ に対して次が成り立つ。

$$|b_n^{(2)}| \leq \frac{N|a_N - \alpha| + \cdots + n|a_n - \alpha|}{1 + \cdots + n} < \frac{(N + \cdots + n)\varepsilon}{1 + \cdots + n} \leq \varepsilon.$$

また、$N_2 = N_2(\varepsilon, N, \alpha)$ を十分大きくとれば、$n \geq N_2$ のとき $|b_n^{(3)} - \alpha| = \frac{1+\cdots+(N-1)}{1+\cdots+n}|\alpha| < \varepsilon$ とできる。以上より、$n \geq \max\{N, N_1, N_2\}$ のとき、

$$|b_n - \alpha| = |b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + b_n^{(3)} - \alpha| \leq |b_n^{(1)}| + |b_n^{(2)}| + |b_n^{(3)} - \alpha| < 3\varepsilon$$

となり、題意が成り立つ。

問 5 $c_n = b_n - \beta$ とおくと、

$$\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = \frac{a_1 c_n + \cdots + a_n c_1}{n} + \frac{a_1 \beta + \cdots + a_n \beta}{n}$$

とかけて、右辺第二項は例題 1 より $\alpha\beta$ に収束する。右辺第一項が 0 に収束する事を示そう。いま、$\{a_n\}$ は収束する事より有界。すなわち正定数 M が存在して、任意の n に対して $|a_n| \leq M$ となる。よって、

$$\left|\frac{a_1 c_n + \cdots + a_n c_1}{n}\right| \leq \frac{|a_1||c_n| + \cdots + |a_n||c_1|}{n} \leq M \frac{|c_1| + \cdots + |c_n|}{n}$$

であり、$\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$ だから再び例題 1 より上式の右辺は 0 に収束する。よって求める極限は $\alpha\beta$ となる。

・問 1 の証明では本質的に、与えられた公理からアルキメデスの原理 (自然数は上に有界でない) が導かれる事を示しています。なお、「極限と定数倍が順序交換可能である」事と「数列が収束するときその部分列も同じ値に収束する」事を既知とすれば、次のような解き方もできます。

$-\frac{1}{n}$ は n について単調増加かつ有界より、極限値 $-\alpha$ を持つ。よって $a_n = \frac{1}{n}$ も極限値 α を持つ。ここで $b_n = \frac{1}{2n}$ とおくと、$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の部分列ゆえ、同じ極限値 α を持つ。いま、$a_n = 2b_n$ だから、両辺 $n \to \infty$ とすれば $\alpha = 2\alpha$ となる。よって $\alpha = 0$。

・問 2 は ε と $\varepsilon^2 + 2\varepsilon$ が 1 対 1 に対応する事から自明にも見えますが、厳密な言葉で説明する事が必要です。
・問 5 は勿論、例題 1 の結果を用いず直接計算によっても示されます。

(解答例作成：三角)