第 9 回複素解析学 II 演習 (2011 年 6 月 14 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること．

[**R12**] 以下を示せ：
(a) 位相空間 X が Hausdorff $\iff$ 対角線集合 $\Delta X = \{(x,x) : x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合
(b) 正則関数の層は Hausdorff 空間である．

以下は教室発表用の問題です．

[**50**] $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ に対して超幾何級数を

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} z^n$$

によって定義する．
(a) $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は $|z|<1$ で収束することを示せ．この関数を超幾何関数という．
(b) $|z|<1$ において次を示せ：

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha} dt$$

（ヒント: $(1-zt)^{-\alpha}$ を z についてベキ級数展開する）
(c) 超幾何関数は正の実軸に沿って解析接続が可能であることを示せ．

[**51**] Ω を領域とし，u を Ω 上の調和関数とする．いま，$D \subset \Omega$ を開円板とし，f を $u = \mathrm{Re}\, f$ を満たす D 上の正則関数とすると，f は Ω 内のすべての曲線に沿って解析接続できることを証明せよ．

[**52**] $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．
(a) $\boldsymbol{f} = \mathrm{Log}\, z$ とすると，Riemann 面 $\mathcal{R}(\boldsymbol{f})$ は $\{(z, e^z) : z \in \Omega\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ と位相同型であることを証明せよ．
(b) $\boldsymbol{g} = \sqrt[n]{z}$（ただし $n \in \mathbb{N}$）について (a) と同様の議論をせよ．

[**53**] $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域，$a \in \Omega$，$\boldsymbol{f}$ を大域的解析関数とする．このとき，

$$\mathfrak{s}_a = \{P(a) : P \in \boldsymbol{f}, \pi(P) = a\}$$

と定義する．
(a) $\mathfrak{s}_a$ は高々可算な集合であることを示せ．
(b) $\mathfrak{s}_a$ の濃度は $a \in \Omega$ によらず一定であることを示せ．

[**54**] (a) 単位円板 Δ 上の正則関数 f で，$2\exp\{f(z)^2\} = 1 + z$ を満たすものが存在することを示せ．
(b) $\gamma_1 : [0,1] \ni t \mapsto -1 + e^{2\pi i t}$, $\gamma_2 : [0,1] \ni t \mapsto 1 - e^{2\pi i t}$ を 2 つの曲線とする．$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ をそれぞれ関数要素 f_0 を始点とする γ_1, γ_2 の lift とする．このとき，$\tilde{\gamma}_1(1) \neq \tilde{\gamma}_2(1)$ を示せ．
(c) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ とするとき，曲線 $\gamma_1\gamma_2$ と $\gamma_2\gamma_1$ は Ω 内で homotopic ではないことを証明せよ．