第 8 回複素解析学 II 演習 (2011 年 6 月 7 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R11] $\mathcal{O}$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数の層とする。$P \in \mathcal{O}$ に対して $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$ の収束半径を $r(P)$, 定数項を $a_0(P)$ とする。

(a) $r : \mathcal{O} \to (0, +\infty]$ は連続であることを示せ。

(b) $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ を開集合 U 上の断面とする。合成 $a_0 \circ \varphi : U \to \mathbb{C}$ は正則であることを示せ。また正則写像 $f : U \to \mathbb{C}$ に対して $\varphi(a) = (f(z)$ の $z = a$ でのベキ級数展開) により写像 $\varphi : U \to \mathcal{O}$ を定義すれば $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ であることを示せ。

コメント：$\mathcal{O}$ の位相の定義の確認のための問題です。簡単ですので、できるだけ正確に答えを書いて下さい。

以下は教室発表用の問題です.

[44] $P \in \mathcal{O}$ に対してその微分 P' を対応させる写像 $d/dz : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ は連続であることを示せ。

[45] (ガンマ関数) (a) 広義積分

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \mathrm{Re}\, z > 0$$

は収束し z の正則関数を定めることを示せ．これを $\Gamma(z)$ を書きガンマ関数とよぶ.

(b) $\mathrm{Re}\, z > 0$ において $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ が成り立つことを確かめ，これを用いて $\Gamma(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されることを示せ.

(c) $\Gamma(z)$ の極と留数を求めよ.

[46] ($\sqrt[n]{z}$ のリーマン面) n を自然数とする．$F = \{f(z) \in \mathcal{O} : f(z)^n = z\}$ は $\mathcal{O}$ の連結成分であることを示せ.

[47] 巾級数 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{n!}$ は収束円の外には解析接続できないことを示せ.（すなわち，収束円 $\Delta(0, r)$ に含まれない領域上 D の正則関数 g で $\Delta(0, r) \cap D$ のある連結成分上で $f = g$ が成り立つものは存在しない.）

[48] $\arctan z$ について $a \neq \pm i$ ならば a を中心とした関数要素があることを示しその収束半径を求めよ。(注意：$\arctan z$ の関数要素とは $\tan(f(z)) = z$ を満たす a 中心の巾級数のことである．)

[49] $\sum c_m$ $(c_m > 0)$ は収束するとする．$\{a_m\}$ は実軸上で稠密な点列とすると，$f(z) = \sum c_m (z - a_m)^{-1}$ は $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ と $\{\mathrm{Im}\, z < 0\}$ とで正則であるが，実軸をこえては解析接続されないことを示せ.