第 3 回複素解析学 II 演習 (2011 年 4 月 26 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

次の問題を解き次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R4] C^1 閉曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ 内のに対して $z \notin [\gamma] = \gamma([a,b])$ の回りの回転数を $n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ と定義する.

(1) $n(\gamma, z)$ は $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ 上の連続関数であることを示せ.

(2) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ を示せ.

(3) $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ の非有界な連結成分上では $n(\gamma, z) = 0$ であることを示せ.

(4) 正の実軸と γ が有限個の点 $\gamma(t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ で交わり，さらに $s_j = \mathrm{Im}\gamma'(t_j) \neq 0$ を満たすとする．このとき $n(\gamma, 0) = \sum_{j=1}^k \dfrac{s_j}{|s_j|}$ を示せ.

以下は教室発表用の問題です.

[15] 連続関数 $f\colon [0,1]^2 \to D \subset \mathbb{C}$ が $f(t,0) = f(0,t) = f(1,t) = 0$, $t \in [0,1]$ を満たすとする．このとき連続写像 $g\colon [\Delta] \to D$ で $g(e^{2\pi i t}) = f(t,1)$ を満たすものが存在することを示めせ.

[16] $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset \mathbb{C}$ を単連結開集合の列とするとき $D = \cup_j D_j$ も単連結であることを示せ。V_j が開集合であるという仮定を省いた場合、同じ結論は成り立つか？

[17] $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, z \neq \pm 1/2\}$ 上の正則関数 $f(z)$ を考える。$F \in \mathcal{O}(U)$ で $F' = f$ となるものが存在する必要十分条件は $\int_{|z-1/2|=1/4} f(z)dz = 0$ かつ $\int_{|z+1/2|=1/4} f(z)dz = 0$ であることを示せ。

[18] Ω を $\mathbb{C}$ 内の領域とし, $\mathrm{Aut}(\Omega)$ を Ω から Ω への双正則写像全体とする.

(a) $\mathrm{Aut}(\Omega)$ は, 写像の合成に関して群をなすことを示せ.

(b) $\mathrm{Aut}(\Omega)$ に「$\{f_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ が Ω 上広義一様に収束するとき, $\{f_j\}$ は $\mathrm{Aut}(\Omega)$ において収束するとする」というようにして位相を入れる．このとき, $\mathrm{Aut}(\Omega)$ がコンパクトでないような有界領域 Ω の例をあげよ.

[19] $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ が恒等写像でないとき, $\sigma(z) = z$ となる $z \in \mathbb{C}$ が存在しないのは $\sigma(z) = z + b$ $(b \neq 0)$ とかけるときであることを示せ.

[20] $P(z)$ を複素係数の k 次多項式とする．$r \geq 0$ に対して閉曲線 $\gamma_r\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ を $\gamma_r(t) = P(re^{2\pi i\theta})$ によって定義する.

(1) 十分大きな r に対して $n(\gamma_r, 0) = k$ を示せ.

(2) P が $r_1 \leq |z| \leq r_2$ に根を持たないとすると $n(\gamma_t, 0)$ は $t \in [r_1, r_2]$ で定数であることを示せ.

(3) $P(0) \neq 0$ であるとき $n(\gamma_0, 0)$ を求めよ.

(4) 上の結果を用いて代数学の基本定理を証明せよ.

演習問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます. 講義メモも載せています.