第 12 回複素解析学 II 演習 (2011 年 7 月 5 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R15] $\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合 K に対して

$$\widehat{K} = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \|f\|_K, \forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\}$$

と定義する．ここで $\|f\|_K = \max_{z \in K} |f(z)|$ である.

(a) $\widehat{K}$ はコンパクトであることを示せ.

(b) $K = [\Delta(0,5)] \setminus (\Delta(2,1) \cup \Delta(3,1))$ に対して $\widehat{K}$ を求めよ．ここで $\Delta(a,r)$ は中心 a 半径 r の開円板.

以下は教室発表用の問題です.

[64] $K \subset \mathbb{C}$ をコンパクト集合，$\mathbb{C} \setminus K$ は連結とする．$f \in \mathcal{O}(K)$ に対して多項式の列 $\{f_n\}_n$ で

$$\lim_{n \to \infty} \max_{z \in K} |f(z) - f_n(z)| = 0$$

を満たすものが存在することを示せ.

[65] V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，V 上の $\mathbb{R}$ 値線形写像全体のなす集合を V^* をする．コンパクト集合 $K \subset V$ に対して

$$\widehat{K} = \{v \in V : f(v) \leq \max_{w \in K} f(w), \forall f \in V^*\}$$

をおく．$\widehat{K}$ は K を含む最小の凸集合であることを示せ.

[66] $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z)$ の極を a_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ とする．つぎを仮定する：

(a) 極の位数はすべて 1 であり $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \cdots$ とする.

(b) $\lim_{n \to \infty} R_n = \infty$ を満たすある実数列 $\{R_n\}$ に対して $\sup_n \left(\sup_{|z| = R_n} |f(z)| \right) < \infty$

次の等式を示せ：

$$f(z) = f(0) + \lim_{n \to \infty} \sum_{|a_k| < R_n} \mathrm{Res}(f, a_k) \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right).$$

[67] K を複素領域 Ω のコンパクト集合とする．次の (a), (b) は同値であることを示せ.

(a) $\Omega \setminus K$ の各連結成分は Ω で相対コンパクト

(b) $\forall z \in \Omega \setminus K$ に対して $|f(z)| > \|f\|_K$ を満たす $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が存在する.