第 11 回複素解析学 II 演習　レポート問題　解答例・コメント

2011/7/19　TA 松本佳彦

[R14] 問題訂正：(誤) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ → (正) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$

(1) 次の順番に証明する．

(a) z が $\underline{\operatorname{Re} z > 0}$ を満たすとき，Lebesgue 積分 $\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ の値は確定する（広義 Riemann 積分と考えてもよい）．ただし $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$．この積分値を $f(z)$ と書くと，$f(z)$ は $\underline{\operatorname{Re} z > 0}$ において正則．

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，$\operatorname{Re} z > 0$ では $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ が成立する．

［注］問題文では与えられた積分を z がどのような値のときに考えるべきか指定されていないので，(a) の下線部は必ずしも「$\operatorname{Re} z > 0$」でなくてもかまいません．たとえば「$\operatorname{Re} z > 1$」とすれば，積分値が確定することは自明になります．採点にあたっては，そのような答案ももちろん正解としました．

また，(a), (b) には論理的には省略できる部分が含まれています．たとえば，$\operatorname{Re} z > 0$ において $f(z)$ が正則であることを直接示さなくても，この範囲で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ が成り立つことを確かめた上で後者が正則であることを見れば十分と言えるでしょう．

(a) 被積分関数を $\varphi(z,t) = e^{-t}t^{z-1}$ とおく．$|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z-1}$ であり，したがって被積分関数の絶対値は $|\varphi(z,t)| = e^{-t}t^{\operatorname{Re} z-1}$ である．ゆえに $\operatorname{Re} z > 0$ において $\int_0^1|\varphi(z,t)|dt \le \int_0^1 t^{\operatorname{Re} z-1}dt < +\infty$ なので，積分 $\int_0^1 \varphi(z,t)dt$ の値も確定する．

被積分関数を z について微分すると $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t) = e^{-t}t^{z-1}\log t$ である．任意の $a > 0$ に対し，$\operatorname{Re} z > a$ の範囲では，$0 < t \le 1$ で $|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)|$ は z によらない可積分関数 $e^{-t}t^{a-1}\log t$ で上からおさえられるので，$f(z)$ は z について微分可能である（「**コメント**」を参照）．$a > 0$ は任意なので，これは $\operatorname{Re} z > 0$ 全体で成立する．

(b) 任意の点 $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ に対し，その十分小さい近傍 U をとる．すると $\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は U 上ですべて正則で，また U 上では，$|\frac{1}{z+n}|$ を n に依存しない定数を用いておさえられるようにすることができる．このとき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ は U 上絶対一様収束し，U 上正則な関数を定める．$z_0 = -k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) のときは，十分小さい近傍 U をとれば，$\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ は $n = k$ の場合を除き正則で，上と同様の評価により $\sum_{n\ne k}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ は U 上絶対一様収束し，U 上正則である．ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} + \sum_{n\ne k}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

は U において有理型である（U 内の極は $z = -k$ のみ）．以上で，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数を与えることがわかった．極は $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ にあり，いずれも 1 位の極である．

z を $\operatorname{Re} z > 0$ の範囲でひとつ固定すると，$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n$ ($0 \le t \le 1$ で一様収束)．したがって $e^{-t}t^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}$ で，この級数も $0 \le t \le 1$ 上で一様収束する（十分大きな n に対し $\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}$ は $0 \le t \le 1$ 全体で定義されているので，「$0 \le t \le 1$ 上で一様収束する」という主張が意味を持つ）．ゆえに

$$f(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}.$$

(2) $\operatorname{Re} z > 0$ において，定義より

$$\Gamma(z) - f(z) = \int_1^\infty \varphi(z,t)dt.$$

ところで，右辺の積分の値は $\mathbb{C}$ 全体で確定し，しかも $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t) = e^{-t}t^{z-1}\log t$ は，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し，$\operatorname{Re} z < a$ の範囲で，z に依存しない可積分関数 $e^{-t}t^{a-1}\log t$ でおさえられる．したがって右辺は整関数（$\mathbb{C}$ 全体で定義された正則関数）を定める．この関数を $g(z)$ と書けば，一致の定理により，$\mathbb{C}$ から Γ, f の極を除いた領域で $\Gamma(z) - f(z) = g(z)$ が成立する．すなわち，有理型関数として $\Gamma(z) = f(z) + g(z)$ である．

［(2) の別解］極の位置とその主要部を 2 つの関数について比較し，一致することを確認してもいいです．

コメント

今回は「何を証明すれば問題に答えたことになるのか」が自明ではなく，その点で難しかったのではないかと思います．返却されたレポートを見て，自分で証明した個々の事実とそれらの論理的関係を見直し，それで十分に今回の問題への解答になっているのか，足りないとすれば何を付け加えればいいのか，冗長な部分はあるか，再度検討するとよいと思います．

これまでに何度か使った「積分記号下の微分」について補足しておきます（もっと早くやっておくべきだったかもしれませんが）．Lebesgue 積分の講義で，実変数に関する微分の場合の定理を習ったと思います．ここでは，複素変数に関する微分についても同様のことができることを確認しましょう．

［定理］X を任意の測度空間，$\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とする．複素数値関数 $f\colon \Omega \times X \to \mathbb{C}$ が次を満たすと仮定する．

- 任意の $z \in \Omega$ に対し，$f(z,t)$ は t の関数として X 上可積分.
- 任意の $t \in X$ に対し，$f(z,t)$ は z の関数として Ω 上正則.
- $|\frac{\partial}{\partial z}f(z,t)| \leq \varphi(t)$ を満たすような，X 上の可積分関数 $\varphi(t)$ が存在する．

このとき $F(z) := \int_X f(z,t)$ は正則で，$F'(z) = \int_X \left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,t)\right) dt$ が成り立つ．

［証明］$z = x + iy$ とし，$f(z,t)$ を t, x, y の関数と見たものを $f(x,y,t)$ と書く．同様に $F(z)$ を x, y の関数と見たものを $F(x,y)$ と書く．また，Ω を $\mathbb{R}^2$ の領域と見たものも同じ記号 Ω で表す．このとき次が成り立つ．

(i) 任意の $(x,y) \in \Omega$ に対し，$f(x,y,t)$ は t の関数として X 上可積分.
(ii) 任意の $t \in X$ に対し，$f(x,y,t)$ は (x,y) の関数として Ω 上 C^1 級.
(iii) 任意の $t \in X$ に対し，$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})f(x,y,t) = 0$.
(iv) $|\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f(x,y,t)| \leq \varphi(t)$ を満たすような，X 上の可積分関数 $\varphi(t)$ が存在する．

(iii) を使って (iv) の不等式を書き換えれば，$|\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,t)| = |\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,t)| \leq \varphi(t)$ という評価も得られる．したがって，実変数の場合の定理から $F(x,y)$ も微分可能であって

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \int_X \left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,t)\right) dt, \qquad \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \int_X \left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,t)\right) dt.$$

これらの導関数が連続であることが，Lebesgue の優収束定理から従う．ゆえに $F(z)$ は C^1 級で，特に各点で全微分可能でもあり，しかも $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F(z) = (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})F(z) = 0$ なので $F(z)$ は正則．また，

$$F'(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)F(z) = \int_X \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)f(z,t)\right) dt = \int_X \left(\frac{\partial}{\partial z}f(z,t)\right) dt.$$