第 9 回複素解析学 I 演習 (2006 年 12 月 22 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎&塚本泰三

[1] から [4] までを解いて，この演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1] **問題 5'.**

函数 f は領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im} z| < 1\}$ で正則であって，ある実数 α に対して

$$|f(z)| \leq (1 + |z|)^{\alpha}$$

を定義域上でみたすとする．このとき，各自然数 n に対して，ある定数 C_n が存在して，不等式

$$|f(x)| \leq C_n (1 + |x|)^{\alpha}$$

を実軸上でみたすことを示せ．

[2] **ホモトピー**

(1) 講義ノートを参照して，二つの道がホモトピックであることの定義を書け．

(2) 複素平面 $\mathbb{C}$ の中の二つの道

$$\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{\pi i t},$$
$$\gamma_2 \colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{-\pi i t}$$

はホモトピックであることを示せ．

(3) 領域 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の中の二つの道

$$\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{\pi i t},$$
$$\gamma_2 \colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{-\pi i t}$$

はホモトピックでないことを示せ．

[3] **単連結**

(1) 講義ノートを参照して，領域が単連結であることの定義を書け．

(2) Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ が単連結であることを示せ．

(3) 複素平面 $\mathbb{C} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ も単連結であることを示せ．

(4) 領域 $\mathbb{C}^* := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ は単連結でないことを，Cauchy の積分定理を使って，示せ．

[4] **計算練習**

(1) 道 $\mathbb{C}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の単一閉曲線であって点 $\pm i$ を通らないものとする．このとき，積分

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\, dz$$

を計算せよ．

(2) 任意の実数 y に対して等式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixy}\, dx = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

を示せ．

第 9 回レポート問題 (2006 年 12 月 22 日出題)

[1] と [2] を解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を用いて，氏名と学籍番号と出題日を記した表紙を付けて，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には直接は関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します．

[1] **revenge**

第 7 回レポート問題 [1] は誰も解いてくれなかったのですが，なかなかおもしろい不等式だと思うので，誘導を付けて再び出題します．悔しい人は小問は見ないでもう一度考えてみてください．

函数 $f(z)$ は単位開円板上で正則で境界まで連続に拡張できるとする．このとき，任意の正実数 p に対して不等式

$$\int_{-1}^{1} |f(z)|^p \, |dz| \leq \frac{1}{2} \int_{|z|=1} |f(z)|^p \, |dz| \quad \cdots (*)$$

を示したい．但し，左辺は実軸上を積分して，右辺は単位円周上を積分している．

(1) $p = 2$ で，f が境界まで正則に拡張可能で，実軸上では実数値をとるときに，不等式 $(*)$ を示せ．

(2) $p = 2$ で，f が境界まで正則に拡張可能なときに，不等式 $(*)$ を示せ．

(3) $p = 2$ のときに，不等式 $(*)$ を示せ．

(4) f が単位開円板内に零点を持たないときに，不等式 $(*)$ を示せ．

(5) 函数 g は単位開円板上で正則とする．任意の実数 $0 < \rho < 1$ に対して開円板 $D_\rho := \{|z| < \rho\}$ 上の g の零点を $\{z_1, \ldots, z_n\}$ とする．さらに，函数 $G_\rho(z)$ を

$$G_\rho(z) := \frac{\rho(z - z_1)}{\rho^2 - \bar{z_1} z} \cdots \frac{\rho(z - z_n)}{\rho^2 - \bar{z_n} z}$$

で定める．このとき，函数 $g(z)/G_\rho(z)$ は D_ρ 上で正則であり零点も持たないことを示せ．

(6) 一般の場合に不等式 $(*)$ を示せ．

[2] **簡単な不等式**

任意の正実数 r に対して不等式

$$\int_0^\infty e^{-r \sin\theta} \, d\theta < \frac{\pi}{r}$$

が成り立つことを示せ．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(問題作成: 松尾信一郎)