第 6 回複素解析学 I 演習略解 (2006 年 11 月 17 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1]

簡単のため閉区間の場合を考える．関数が正則であるという性質は局所的なものであるから，Morera の定理より，次のことを示せば十分である；$B := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}z| \le 1, |\mathrm{Im}z| \le 1\}$ の近傍上で定義された連続関数 g が実軸の補集合の上で正則であるとき，

$$\int_{\partial B} g(z)\,dz = 0$$

である．ただし，∂B は B の境界であり，反時計周りに向きをとったものとする．そこで $0 \le \varepsilon < 1$ なる任意の ε にたいし B_ε^+ を $1+i, -1+i, -1+i\varepsilon, 1+i\varepsilon$ を頂点とする長方形，B_ε^- を $1-i, -1-i, -1-i\varepsilon, 1-i\varepsilon$ を頂点とする長方形とし，いずれも反時計回りに向きを取っておくと，

$$\int_{\partial B} g(z)\,dz = \int_{B_0^+} g(z)\,dz + \int_{B_0^-} g(z)\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon^+} g(z)\,dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon^-} g(z)\,dz = 0$$

となり，示された．

[2]

$\dfrac{\log(1+z)}{z} = 1 - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{3} - \dfrac{z^3}{4} + \cdots = 1 - \dfrac{z}{2} + z^2 g(z)$ とおく．（ここで $g(0) = \frac{1}{3}$）さらに $e^{w+1} = e + ew + \dfrac{ew^2}{2} + \dfrac{ew^3}{6} + \cdots = e + ew + \dfrac{ew^2}{2} + w^3 h(w)$ とおく．ここで，収束半径を考えると分かることだが，どちらも原点の近傍で g, h は正則関数である．よって，原点の近傍で

$$(1+z)^{\frac{1}{z}} = e\left(1 - \frac{z}{2} + z^2 g(z) + \frac{1}{2}(-\frac{z}{2} + z^2 g(z))^2 + (-\frac{z}{2} + z^2 g(z))^3 h\left(-\frac{z}{2} + z^2 g(z)\right)\right)$$

これより，

$$\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{\frac{1}{z}} - e + \frac{ez}{2}}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + zg(z))^2 + g(z) = \frac{11}{24}$$

となる．

[3]

$\{h_n\}_{n=1}^\infty$ が $Z := \{z \in \Omega \mid g(z) = 0\}$ の補集合の上で広義一様収束することはよい．あとは $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ が Z の各点の近傍で一様収束することを言えばよいが，Z は離散集合であるから，$\{h_n\}_{n=1}^\infty$ が原点中心の単位円板 $\Delta(1)$ 上の正則関数の列であり，$\Delta(1) \setminus \{0\}$ 上広義一様収束しているとして，$\Delta(1)$ 上でも広義一様収束することを示せばよい．実際，$A := \{z \in \Delta(1) \mid 1/4 \le |z| \le 3/4\}$ と置くと，$\{h_n\}_{n=1}^\infty$ は A 上一様収束し，

$$\sup_{|z|<1/4} |h_n(z) - h_m(z)| \le \sup_{z\in A} |h_n(z) - h_m(z)| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

ここで，$|z| < 1/4$ なる各 z にたいして，z を中心とする半径 $1/2$ の円周上で Cauchy の評価式を使ったが，次回以降に講義で示される最大値の原理を認めてしまえば，このような回りくどい議論は必要が無い．

[4]

Ω は開集合だから $r > 0$ をとって $B_{2r}(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-w| \leq 2r\} \subset \Omega$ が成り立つようにできる. この時，$B_r(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-w| \leq r\}$ 上で f, g をテーラー展開できて微分係数に関する仮定から，$f(z) = \dfrac{f^{(n+1)}(w)(z-w)^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$，$g(z) = \dfrac{g^{(n+1)}(w)(z-w)^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$ となる. 前の問と同様に $F(w) = G(w) = 1$ として $f(z) = \dfrac{f^{(n+1)}(w)}{(n+1)!}(z-w)^{n+1}F(z)$，$g(z) = \dfrac{g^{(n+1)}(w)}{(n+1)!}(z-w)^{n+1}G(z)$ と最低次のべきをくくりだして，極限をとれば，問題にある値になる.

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/

(解答作成: 塚本泰三)