第 5 回複素解析学 I 演習略解 (2006 年 11 月 10 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎＆塚本泰三

復習ポイント

- 区分求積法と Riemann 積分の定義.
- Cauhcy の評価式とその証明．Liouville の定理.
- 複素解析学 I のポイントは Cauchy の積分定理の使い方に慣れることです.

[1] Cauchy の積分定理

まずは左辺の和の極限を積分に書き換えます．いわゆる区分求積法ですね.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(r\exp(\frac{2\pi k}{n}i)) = \int_0^1 f(re^{i\pi\theta})\,d\theta$$

ところで，どうしてこのような書き換えが許されるのでしょうか．説明に窮したら，Riemann 積分の定義とその周辺を復習しましょう．f は連続なので可積分であって，もしも函数が可積分ならばどんな分割の選び方をしても Riemann 和は積分値に収束するのでした．次に，この積分を線積分に書き換えてから，Cauchy の積分公式を使います.

$$\int_0^1 f(re^{i\pi\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{iz}\,dz = f(0).$$

これで全て示されました.

[2] Cauchy の評価

Cauchy の評価をうまく使います.

まずは Cauchy の評価より，任意の $r\in(0,1)$ で

$$g^{(n)}(0) \le \sup_{|\zeta|=r} f(\zeta)\cdot\frac{n!}{r^n}$$

です．また，仮定 $g(z)\le 1/(1-|z|)$ より

$$\sup_{|\zeta|=r} f(\zeta) \le \frac{1}{1-r}$$

です．これらを合わせれば，結局，任意の $r\in(0,1)$ で

$$g^{(n)}(0) \le \frac{n!}{r^n(1-r)} \qquad \cdots \quad (*)$$

が成り立つとわかります．ところで，$r\in(0,1)$ では

$$\frac{n!(n+1)^{(n+1)}}{n^n} \le \frac{n!}{r^n(1-r)}$$

です．式 $(*)$ の左辺は r に依存していないことに注意すれば，これまで全てを合わせて，

$$g^{(n)}(0) \le \frac{n!(n+1)^{(n+1)}}{n^n}$$

を得ます．これが示したいことでした．

ちなみに，この評価は最良ではありません．それは比較的簡単に示せます．でも，最良の評価をわたしは知りません．わかったら教えてください．

[3] Cauchy の評価

いわゆる Liouville の定理です．ただの滑らかな函数ではこの問題のような主張は全然成り立ちません．函数の正則性が垣間見せる深遠です．

さて，証明してみましょう．h が高々k 次であることを示したいのでした．それには h の $k+1$ 次微分係数が各点で消えていることを示せば十分です．Cauchy の積分定理より，各点 $a \in \mathbb{C}$ で，任意の正実数 r に対して

$$h^{(k+1)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{h(z)}{(z-a)^{(k+2)}}\, dz$$

です．また，仮定の不等式 $h(z) \leq M|z|^k$ より，

$$\left| \frac{h(z)}{(z-a)^{(k+2)}} \right| \leq M \cdot \frac{|z|^k}{|z-a|^{(k+2)}}$$

です．ところで，円周 $\{|z-a| = r\}$ 上では $|z| \leq |a| + r, |z-a| = r$ です．よって，各点 $a \in \mathbb{C}$ で，任意の正実数 r に対して

$$|h^{(k+1)}(a)| \leq \frac{M}{2\pi i} \cdot \frac{(|a|+r)^k}{r^{(k+2)}}$$

が成り立つことがわかりました．左辺は r には依存していないことに注意しましょう．従って，$r \to \infty$ とすれば，所望の $h^{(k+1)}(a) = 0$ が得られます．すなわち，$h^{(k+1)}$ は各点で消えていることがわかりました．これが示したいことでした．

ちなみに，この問題では原点での増大度まで指定されているので，h が 0 か k 次単項式であることまで示せます．考えてみてください．

[4] 積分の計算

a, b が正実数の場合に計算してみます．Cauchy の積分公式に帰着させます．

まず，$z := a\cos\theta + ib\sin\theta$ としたときに，

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z} \frac{dz}{d\theta} \right) = \frac{ab}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

が成り立つことに注意します．これがミソです．これに気付けば簡単で，

$$2ab \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\frac{dz}{d\theta} \right) d\theta = \mathrm{Im} \int_C \frac{dz}{z} = 2\pi.$$

但し，曲線 C は楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ に正の向きを付けたものです．線積分を dz 積分に書き換えるときに $1/z$ が必要なことに注意しましょう．最後の等式は Cauchy の積分定理です．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(略解作成: 松尾信一郎)