第 5 回複素解析学 I 演習 (2006 年 11 月 10 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎＆塚本泰三

[1] から [4] までを解いて，この演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1] Cauchy の積分定理

函数 f は単位閉円板上で正則とする．このとき，任意の $r \in [0,1]$ で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(r\exp(\frac{2\pi k}{n} i)) = f(0)$$

が成り立つことを示せ.

[2] Cauchy の評価

函数 g は単位開円板上で正則であって，さらに，

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$$

をみたすとする．このとき，

$$|g^{(n)}(0)| \leq \frac{n!(n+1)^{(n+1)}}{n^n}$$

を示せ．余力があれば，この評価が最良かどうかを考察せよ．

[3] Cauchy の評価

函数 f は複素平面全体で正則であって，さらに，非負整数 k と正実数 $M > 0$ が存在して

$$|f(z)| \leq M|z|^k$$

をみたすとする．このとき，f は高々k 次多項式であることを示せ.

[4] 積分の計算

正の実数 a, b にたいし積分

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

を計算せよ.

第 5 回レポート問題 (2006 年 11 月 10 日出題)

[1] と [2] を解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を用いて，氏名と学籍番号と出題日を記した表紙を付けて，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には直接は関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します．

[1] **弱い Jordan の閉曲線定理**

平面内の任意の単純閉曲線は少なくとも二つの領域を定めることを，例えば回転数を用いた議論により，証明せよ．ちなみに，平面内の任意の単純閉曲線は ちょうど 二つの領域を定める，というのが有名な Jordan の閉曲線定理である．

[2] **超函数 (baby version)**

多項式 $p(z)$ に対して

$$P(z) := \int_0^1 \frac{p(t)}{t-z}\,dt \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [0,1])$$

と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) $P(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ で正則であることを示せ．

(2) 任意の実数 $x \in (0,1)$ で極限

$$\lim_{\epsilon \to 0} P(x+i\epsilon) \text{ and } \lim_{\epsilon \to 0} P(x-i\epsilon)$$

が存在することを示せ．

(3) さらに，

$$\lim_{\epsilon \to 0}(P(x+i\epsilon) - P(x-i\epsilon)) = 2\pi i p(x)$$

が成り立つことを示せ．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(問題作成: 松尾信一郎)