第 11 回複素解析学 I 演習 (2007 年 1 月 26 日実施)

担当教員 平地健吾 / TA 松尾信一郎＆塚本泰三

[1] から [4] までを解いて，この演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1] **定積分の計算**

(1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^4+1}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

(2) 次の定積分を求めよ．これは大学院入試の過去問である．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x)\frac{e^x}{1+e^{3x}}\,dx \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

[2] log **の多価性**

(1) 講義ノートを参照して，複素関数としての対数関数 log の定義を書け．

(2) 等式

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

が成り立つ複素数 α の範囲を求めよ．

[3] **定積分の計算**

等式

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx = -\pi \log 2$$

を示せ．

[4] **級数の和の計算**

留数計算を用いて，等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi a}\right)^2 \quad (a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

を示せ．

第 11 回レポート問題 (2007 年 1 月 26 日出題)

[1] と [2] を解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を用いて，氏名と学籍番号と出題日を記した表紙を付けて，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には直接は関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します．

[1] 最大値の原理

一般に，実数 $0 < \delta < R$ に対して

$$A(R,\delta) := \{z \in \mathbb{C} \mid \delta \leq |z| \leq R\}$$

として，$A(R,\delta)$ の境界を $\partial A(R,\delta)$ とする．

(1) 正則函数 $f\colon A(R,\delta) \to \mathbb{C}$ に対して

$$\min_{c\in\mathbb{C}} \max_{z\in A(R,\delta)} |f(z)-c| \ \leq\ \int_{\partial A(R,\delta)} 2|f'(z)|\,|dz|$$

を示せ．

(2) 正則函数 $g\colon A(R,1) \to \mathbb{C}$ は

$$|g'|(z) \leq \frac{1}{2|z|} \quad (z \in A(R,1))$$

を充たすならば,

$$\iint_{A(R^{1/2}e^t, R^{1/2}e^{-t})} 4|g'(z)|^2\,dxdy \ \leq\ 2\pi\frac{e^{2t}}{R} \quad (0 \leq t \leq \frac{1}{2}\log R)$$

となることを示せ．

[2] 除去可能特異点

単位開円板を Δ として，$\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ とする．このとき，Δ^* 上の正則函数 f が

$$\int_{\Delta^*} |f(z)|^2\,dxdy < \infty$$

を充たすならば，f の Laurent 展開には負の項は現れないことを示せ．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(問題作成: 松尾信一郎)