

第 10 回複素解析学 I 演習 (2007 年 1 月 12 日実施)

担当教員 平地健吾 / TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1] から [4] までを解きこの演習時間内に提出してください。これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません。相談や質問や文献参照は自由にしてください。

[1]

次の関数のカッコ内の点のまわりでの Laurent 展開をもとめよ。

$$(1) \frac{1}{(z-1)(z-5)} (z=0) \quad (2) \frac{1}{(z-2)^2} (z=0) \quad (3) \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} (z=0) \quad (4) \sin \frac{z}{z-1} (z=1).$$

[2]

$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$, $R_n = \frac{\log(n+1)!}{n+3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = +\infty$ を示し、 P_n の零点の絶対値が R_n 以上であることを示せ。

[3]

Δ を \mathbb{C} 上の単位円板とする。

1. Δ 上正則な関数 f が $|f| < 1$ を満たし、相異なる 2 つの不動点をもつとする。このとき $f = \text{id}_\Delta$ であることを示せ。
2. Δ で正則な関数 f が或る正数 $r < 1$ にたいして $|f| < r$ を満たすならば、 f は丁度 1 つの不動点をもつことを示せ。
3. Δ で正則な関数 f であって $|f| < 1$ を満たし、かつ不動点を持たないものの例を 1 個以上示せ。

[4]

次の積分を計算せよ。(a は $a > 1$ なる実数.)

$$(1) \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz \quad (2) \int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)^2(z-3)} dz \quad (3) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin \theta} d\theta \quad (4) \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx.$$

第 10 回レポート問題 (2007 年 1 月 12 日出題)

[1] から [2] までを解き次回の演習で提出してください。解答には A4 版レポート用紙を使い、複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください。これが守られていない場合には採点しません。このレポートは成績には関係しないので、誤魔化すことなく厳密に記述してください。演習への希望や質問を書いてくだされば、次回に反映するように努力します。

[1]

\mathbb{C} の領域 Ω であって、その境界が n 個の互いに disjoint な円周 γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) からなるものを考える。 D_k を $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_k$ の連結成分であって $D_k \cap \Omega \neq \emptyset$ なるものとする。

1. 各 $k = 1, 2, \dots, n$ にたいして D_k 上正則な関数 f_k が存在して $f = \sum_{k=1}^n f_k$ が成り立つことを示せ。
2. f が有界な関数であれば、 f_k たちもそれぞれの定義域において有界な関数であることを示せ。

[2]

1. $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ を $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ を含む領域とし、 f は $D \setminus \{\infty\}$ 上で正則とする。このとき f の ∞ における留数 $\text{Res}_\infty f$ は

$$\text{Res}_\infty f = \text{Res}_0 \left(-\frac{1}{z^2} f \left(\frac{1}{z} \right) \right)$$

で定義される。 f の ∞ における Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

と表したとき、 $\text{Res}_\infty f$ を a_n を用いて書け。

2. g は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理形関数であるとする。(したがって有理関数である。) このとき g の $\hat{\mathbb{C}}$ 上の極における留数の総和は 0 であることを示せ。

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/>

(問題作成: 塚本泰三)