# 複素解析学 I，　４年生向けレポート 2004 年１月配布
担当 平地健吾

複素解析学Ｉの単位を必要とする４年生は以下の問題を解き提出すること（４年生以外の成績の評価は期末試験で行います）．

締め切り：２００４年２月６日

提出場所：数理科学研究科，大学院掛前のポスト

問１　$\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f$ に対して次を示せ:

(a) $|f(z)| \le 1$ が全ての $z$ で成り立てば $f$ は定数である;

(b) $|f(z)| \le |z|$ が全ての $z$ で成り立てば $f(z) = c\,z$ である。ここで $c$ は定数;

(c) $|f(z)| \le |\sin z|$ が全ての $z$ で成り立てば $f(z) = c\,\sin z$ である。ここで $c$ は定数。

問２　次の定積分を求めよ (計算過程を詳しく書くこと)：

$$\text{(a)}\quad \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx \quad \text{ただし } a>0 \qquad \text{(b)}\quad \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+1}dx$$

問３　二つの級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

が $1/2 < |z| < 2$ で絶対収束し正則関数 $f(z)$, $g(z)$ を与えるとする。円周 $|z| = 1$ 上で $f(z) = g(z)$ が成り立てばすべての $n$ について $a_n = b_n$ であることを示せ。

問４　$f$ を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の複素数値連続関数とする。$g(z) = e^{f(z)}$ が正則関数であれば $f$ も正則であることを示せ。(注意：$f(z) = \log g(z)$ なので正則，というのでは不十分です.)