§ Step 6 の解説

Thm Bd Comp d-1 で ok かな。

◎ Thm ACC d + Thm Bd Comp d + Thm (Toric) d + Thm LB d-α d-1

$\Longrightarrow$ Thm LB d-α d.

$d, r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$

$\Longrightarrow \exists \alpha = \alpha(d, \varepsilon) > 0$

s.t. · X : d-dim normal var
· (X, Δ) : ε-lc
· A : n.a. Cartier div on X s.t. $H^d < r$
· $A - \Delta$: ample

$\Longrightarrow$ $lct(|A|_{\mathbb{Q}}; X, \Delta) > \alpha$.

Rmk · 初回に X: normal だけで主張したが実際 Step 9 でつかう時は smooth VにしかΣても用いていないので BAB の証明では smooth で十分

· small Ⓠ-fact をとるぎれと ~~精~~ に行えば容易に Ⓠ-fac に帰着はできるが今回は Ⓠ-Car へ略にします。

· X は bdd だけど (X, Δ) は log Bdd かは わからない。

§§ Bd of local complements.

Step 6 では Thm Bd Comp d を仮定したが、この § では次のその亜種を用いる。これらの証明は ~~Step~~ で行う。

証明のアイデアとしては S上の Complement を lifting でつかうのが すという感じ

Thm (Bd local Comp version 2) Assume Thm Bd Comp d-1 holds

$d \in \mathbb{N}$, $R \subseteq [0,1] \cap \mathbb{Q}$ finite

$\Longrightarrow \exists n = n(d, R)$ s.t. $I(R) \mid n$
$\mathbb{N}$

さらに次をみたす。

こういうのを $\overline{Rlt}$ とってもOK

· (X, B) : Ⓠ-factorial projective of dim d., lc. & $(X, 0)$: klt
· $S \subseteq \lfloor B \rfloor$ component
· $B \in R$.
· M is a semi-ample Cartier div on X with $M|_S \overset{\sim}{_{\mathbb{Z}}} 0$
· $M - (K + B)$: ample.

$\Longrightarrow \exists G \sim (n+1)M - n(K_X + B)$ s.t. $(X, B^+ = B + \frac{1}{n}G)$: lc near S.
$G \geq 0$

§§ First reductions

Thm LBd−αd の証明は
実は次の claim に帰着される. 以下 Thm $LB_{d-1} - \alpha_{d-1}$ は仮定する.

<u>Key Claim</u> $d \in \mathbb{N}$, $r, \varepsilon > 0$ $\exists \varepsilon' = \varepsilon(d, r, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ & $\exists \ell = \ell(d, r, \varepsilon) > 0$

s.t. $\forall X, A, \Delta$ as in Thm LBd−αd & $L \in |A|_{\mathbb{Q}}$

に対して次が成り立つ:

$S := \varepsilon'\text{-lct}(L, X, \Delta)$ & T: ε'-lc place of $(X, \Delta + SL)$ の1つ
bounded で $\dim C_X(T) = 0$

次が成り立つ $\Longrightarrow$ $\exists \varphi : Y \longrightarrow X$: log resolution of X s.t. $\dim C_Y(T) > 0$ or $\dim C_Y(T) = 0$ かつ
$\exists \Lambda \geq 0$ on Y : SNC reduced div s.t. (Y, Λ): log bdd.

$\exists (Y_\ell, \Lambda_\ell) \xrightarrow{\varphi_\ell} (Y_{\ell-1}, \Lambda_{\ell-1}) \xrightarrow{\varphi_{\ell-1}} \cdots \longrightarrow (Y_1, \Lambda_1) \xrightarrow{\varphi_1} (Y, \Lambda)$
: center of T の b-up.

s.t. • center of T は Λ の stratum の1つ

こういうのを T-tracked b-up の列という

• $\varphi_i^*(K_{Y_{i-1}} + \Lambda_{i-1}) = K_{Y_i} + \Lambda_i$

• $T \subseteq Y_\ell$

• $\Lambda \geq \mathrm{Exc}(\varphi)$

要は. T を実現する b-up の回数を上から抑えられる.

<u>Key Claim $\Longrightarrow$ Thm LBd−αd を見る</u>

ε' と ℓ を Key claim のようにとる.

今目的が $\mathrm{lct}(|A|_{\mathbb{Q}}, X, \Delta)$ の lower bd なので

$\mathrm{lct}(|A|_{\mathbb{Q}}, X, \Delta) < 1$ と仮定してよい

よって $L \in |A|_{\mathbb{Q}}$ に対して. $\mathrm{lct}(L; X, \Delta) < 1$ としてよい.

今 ε'-lct$(L;X,\Delta) =: s$ と T というある ε'-lc place of $(X, \Delta + sL)$

を考える。$\dim C_X(T) > 0$ と $\dim C_X(T) = 0$ で場合分けをする。

Case 1 $\dim C_X(T) > 0$

∵ $\dim C_X(T) > 0$ のとき Thm LB$_d$ − α_{d-1} を使うと

$\exists\, \nu = \nu(d, r, \varepsilon) > 0$ s.t. $(X, \Delta + \nu L)$ は lc at general pts on $C_X(T)$

がわかる

$\rightsquigarrow$ $s \geq (1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon})\nu$

∵ { ・$(X, \Delta + (1-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon})\nu L = (1-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon})(\Delta + \nu L) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\Delta)$ は ε'-lc at gen. pt. on $C_X(T)$

・s は その gen. pt での ε'-lc threshold L & T が place だから。

今 ε'-lct $\leq$ lct より 欲しい uniform bd を得る。

Case 2 $\dim C_X(T) = 0$

∵ Key claim のように $\psi: Y \to X$ をとってきて。

もし $\dim C_Y(T) > 0$ とする。

$$\psi^*(K_X + \Delta) = K_Y + B_Y$$

$K_Y = \psi^* K_X + \Sigma c_i E_i$

c_i で下から おさえられ

$Y \to X$ は bounded log resolution より

B_Y の exceptional divisor の 1 ケー ホー は uniform に下から おさえられる。

$\rightsquigarrow_{\Lambda \geq \mathrm{Exc}(\psi)}$ $\exists\, \rho = \rho(d, r) \geq 0$ s.t. $\rho \cdot B_Y + (1-\rho)\Lambda \geq 0$ ……

$\longrightarrow$ $\Delta_Y := \rho B_Y + (1-\rho)\Lambda$

(Y, Δ_Y) は $\varepsilon_Y = \varepsilon \cdot \rho$ − lc.

さらに

$$a(T, Y, \Delta_Y + \rho s \psi^* L) = \rho \cdot \underbrace{a(T, X, \Delta + sL)}_{\varepsilon'} + (1-\rho)\underbrace{a(T, X, \Delta)}_{\overset{\|}{0}}$$

$\Delta_Y + \rho s \psi^* L = \rho(B_Y + s\psi^* L) + (1-\rho)\Delta$

よって T は $(Y, \Delta_Y + \rho s \psi^* L)$ の ε_Y'-lc place
$\varepsilon_Y' = \rho \cdot \varepsilon'$

また (Y, Δ): log bdd より ある n.a. A_Y on Y で $A_Y^d < k_Y$ かつ $A_Y - \Delta$: ample　$\because K_Y + A_Y$: ample
さらに $A_Y - \psi^* A$, A: $-K_X$ を ample ととれ

よって $\underbrace{\dim C_Y(T) > 0 \text{のとき}}$ case 1 が Y につかえて、s を uniform なので $\exists A_Y - \Delta_Y = \rho B_Y \cdots$
に下から おさえられる.

$\dim C_Y(T) = 0$ のときは.

$\varphi_1 : Y_1 \longrightarrow Y$ を sm pt $y := C_Y(T)$ で b-up すると.

E_1 をその exceptional div として书いて
$\varphi_1^*(K_Y + \Delta_Y) = K_{Y_1} + B_{Y_1}$ に定めて
$\mu_{E_1} B_{Y_1} \geq d - 1$ より

$\gamma := \gamma(d) > 0$ s.t. $\Delta_{Y_1} := \gamma B_{Y_1} + (1-\rho)\Delta_1 \geq 0$
となり 上と同様に
(Y_1, Δ_{Y_1}): $\gamma \varepsilon_Y$-lc で T は $(Y_1, \Delta_{Y_1} + \gamma \rho s \varphi_1^* \psi^* L)$
の $\gamma \varepsilon_Y$-lc place

また. 1点 b-up は bounded を保つので、上と同様に、
H_{Y_1} が $H_{Y_1} - \Delta_{Y_1}$ ample になるように
とれる. よって $\dim C_{Y_1}(T) > 0$ なら Case 1 をつかい、
$\dim C_{Y_1}(T) = 0$ ならまた点 b-up $Y_2 \to Y_1$ を考えて
同じことをくりかえすが、length が bound されているので
いつかは $\dim C_{Y_i}(T) > 0$ となる. □

Rmk この証明からわかることだが

$\dim C_{Y_i}(T)=0$ のところは bounded な resolution がとれて、

$\dim C_{Y_i}(T)>0$ のところからは Troidal b-up になっているわけである。

いずれ、

$\underset{\shortparallel}{B_Y}) + (1-\alpha)(\underset{\text{am}}{3A_Y} - P)$

$\underbrace{2A_Y-2\psi^*A_X}_{\text{ample}} - \psi^*(K_X+B) + K_Y$

$+2\psi^*A_X$

net

ample

$H_Y := 3A_Y$ とする.

したがって T を実現する Troidal b-up の列の長さで bound する十分条件を考えることになる。

§§ Troidal b-up の列の数の bound.

次の形で証明される

Prop 1 $d, r\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$, $\exists p=p(d,r,\varepsilon)\in\mathbb{N}$.

s.t. (1) (X,Δ_i) : proj. ε-lc of dim d

(2) Δ : SNC reduced div. & (X,Δ) : log sm

(3) A : v.a. Cartier div s.t. $A^d<r$, $\deg_A\Delta\le r$, $\deg_A P\le r$ ($\deg_A\Delta = A^{d-1}\cdot\Delta$)

(4) x は Δ の 0-dim stratum

(5) $\forall C$: Δ stratum $\not\ni x$ に対して $C\not\subset \mathrm{Supp}\,\Delta$ が成り立つとする.

(6) T を lc place of (X,Δ) で $C_X(T)=x$.

(7) $a(T;X,\Delta)\le 1$

$\Longrightarrow$ T は T の center で b-up で (X,Δ) に対する Troidal b-up の列で長さが p 以下のもので divisor として実現される.

Rem: T が T の center の b-up で 1 つだけは div になることは Zariski の補題からわかる

- さらに T が log sm (X, Δ) の lc center ならその b-up は

$$(X_1, \Delta_1) \xrightarrow{\varphi_1} (X, \Delta)$$

$\Delta_1 = \varphi_{1*}^{-1}\Delta + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{except}}}{E}$ とおけば

$K_{X_1} + \Delta_1 = \varphi_1^*(K_X + \Delta)$ となる.

まずこの Proposition 1 は次の Proposition 2 により $X = \mathbb{P}^d$ の時に帰着される

Proposition 2 $(X, \Delta = \sum_{i=1}^{d} S_i)$: proj. log sm pair of dim d

$\Delta = \sum b_i B_i \geq 0$ $\mathbb{R}$-div. on X に対して.

Prop 1 の (4)(5) と次の (3)' が成り立つとする

(3)' A : n.a. on X s.t. $A - S_i$ is very ample

$\Rightarrow$ $\exists \pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^d_{(t_0 : \cdots : t_d)}$: finite morphism

s.t. (i) $\pi(x) = z := (1:0 \cdots :0)$

(ii) $\pi(S_i) = H_i$, $H_i = (t_i = 0)$

(iii) π is étale over a neighborhood of z

(iv) $(\pi^{-1}(z) \setminus x) \cap \mathrm{Supp}\,\Delta = \phi$

(v) $\deg \pi = A^d$ & $\deg_{\mathbb{P}^d} C \leq \deg_A \Delta$ for $C = \sum b_i \pi_*(B_i)$

∵ $D_i \in |A - S_i|$ general member for $i = 1, \cdots, d$

& $R_i := D_i + S_i$.

Take $R_0 \in |A|$ general member.

$\longrightarrow$ ・$(X, \sum_{i=0}^{d} R_i)$: log sm.

・$(\bigcap_{i=1}^{d} R_i \setminus x) \cap \mathrm{Supp}\,\Delta = \phi \Longleftarrow (5)$

・$\bigcap_{i=0}^{d} R_i = \phi$

よって $R_0, \cdots, R_d \in |A|$ は 東[?]

$$\pi : X \to \mathbb{P}^d_{(t_0 : \cdots : t_d)}$$

s.t. ・$A = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1) \rightsquigarrow \pi$ は finite.

・$R_i = \pi^* H_i \quad (H_i = \{t_i = 0\})$

を定める. このπが(i)〜(v)を満たすことをcheckする.

(i) $\bigcap_{i=1}^{d} R_i = \pi^{-1}(z)$ で $x \in \bigcap_{i=1}^{d} R_i$ よりしたがう.

(ii) $\pi^* H_i = R_i = D_i + S_i$ より πはfiniteだからしたがう.

(iii) $\pi^{-1}(z) = \{y_1, \cdots, y_\ell\}$ とすると. $(X, \sum_{i=1}^{d} R_i)$ は log smooth

なので各点y_iで $\pi^* t_1, \cdots, \pi^* t_d$ は local parameter になっている

よってこれは étale である.

(iv) $\pi^{-1}(z) = \bigcap_{i=1}^{d} R_i$ かつ $(\bigcap_{i=1}^{d} R_i \setminus x) \cap \mathrm{Supp}\,\Delta = \phi$ よりしたがう

(v) by construction, $\deg \pi = A^d$.

また $r_i := \deg \pi|_{B_i}$

$\deg_A B_i = r_i \deg \pi(B_i) \quad r_i \in \mathbb{N}$ より

$\rightsquigarrow \deg_A \Delta \geq \deg_{\mathbb{P}^d} C \quad \circ$

Prop 2 ⇒ Prop 1 を示す　(Prop 2は前回示した)

(3) ⇒ (X, Δ): log bdd.
よって A を uniformに リスケールすることで Δ の comp. S に対して $A-S$ も very ample としてよい.

したがって Prop 2 が使えて,

$\pi: X \longrightarrow \mathbb{P}^d$, C, H_i, ℓ 達が Prop 2 のようにとれる.

今, π の下, Analytic local に $x \in \Delta$ と $z \in \sum_{i=1}^{d} H_i$ を同一視して

T が Zariski の補題で得られる b-up の合成と同じ b-up をその周りで得られた division を T' とする.

X を $\mathbb{P}^d$ でおきかえたいわけだが, étale で log discrepancy が変わらないことに注意すれば (1)-(1) は自動的にみたされる

したがって (1) に相当することを示す必要がある. それが次の Claim である

Claim 3 $\exists \varepsilon' = \varepsilon'(d, r, \varepsilon)$ & $\exists B \geq 0$ $\mathbb{R}$-div on $\mathbb{P}^d$

s.t. ・ $K_{\mathbb{P}^d} + B \sim_{\mathbb{R}} 0$
・ $(\mathbb{P}^d, B)$: ε'-lc
・ $a(T', \mathbb{P}^d, B) \leq 1$.

Claim 3を認めて、Prop 1の証明を終わらせる。

∵ T'はToroidal b-upの合成でdivisorとして実現されるので

Toric多様体からのextractionでつぶせる。

i.e. $\exists\, Y \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^d$ s.t. ・Y: normal Toric, proj.

・$\mathrm{Exc}(\varphi) = T' \subseteq Y$

ここでYに対して $-K_Y$-MMPをはしらせて

$Y \dashrightarrow Y'$ で $-K_{Y'}$: nef & big

& Y' : ε'-lc

By Thm (Toric)$_d$ + Step 7の①より

Y'は bounded.

したがって $\exists\, n = n(d, \varepsilon') \in \mathbb{N}$ & $\exists\, \Omega_{Y'} \geq 0$

s.t. $n(K_{Y'} + \Omega_{Y'}) \underset{\mathbb{Z}}{\sim} 0$

& $(Y', \Omega_{Y'})$: klt

Note. $(\Omega_{Y'} \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$

よって$\Omega_{Y'}$はΩ_Y上にもklt n-complementが構成でき

これを$\mathbb{P}^d$にpushしたので$\Omega_{\mathbb{P}^d}$とおくと(ナー方一$\epsilon = \frac{1}{n}$ととれる)、klt boundary.

$\longrightarrow (\mathbb{P}^d, \Omega_{\mathbb{P}^d})$ は log bdd.

Thm BAB special$_d$

$\rightsquigarrow \exists\, u = u(d, \varepsilon') > 0$ s.t. $(\mathbb{P}^d, \Omega_{\mathbb{P}^d} + u\sum_{i=1}^{d} H_i)$ は lc.

こんどを

$$0 \le a(T', \mathbb{P}^d, \Omega_{\mathbb{P}^d} + u\sum_{i=1}^d H_i) = \underbrace{a(T', \mathbb{P}^d, \Omega_{\mathbb{P}^d})}_{\substack{\shortparallel \\ 1 - \mathrm{mult}_{T'}\Omega_\gamma \\ \wedge| \\ 1}} - u\,\mathrm{ord}_{T'}(\sum_{i=1}^d H_i)$$

一方. $\mathrm{ord}_{T'}(\sum_{i=1}^d H_i) \ge \underset{\sim}{l}$

T'が表われるToroidalなblowupの回数

なので

$l \le \frac{1}{u}$ がしたがう □

よって. Claim 3 の証明に専念する.

Proof of Claim 3 (3ステップに分けて示す)

Step A $\exists\, t = t(d,r) > 0$ s.t. $(\mathbb{P}^d, tC + \sum_{i=1}^d H_i)$ が"出てくるいくつか"ではlc.

(∵)

まず

$\exists\, t = t(d,r) > 0$ s.t. $(\mathbb{P}^d, tC)$: klt

↖ $\deg C <$ bdd だが

もっとくわしく言うと…

別紙

③の帰納法 ~~~~ 次が示せる

Lem $d, r \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists t = t(d,r) > 0$ s.t. X: sm. proj var of dim d

$\cdot\ A$: v.a. of $A^d < r$

$\cdot\ L \geq 0$ is a $\mathbb{R}$-div with $\deg_A L < r$

$\Longrightarrow (X, tL)$: klt

∵ dについての帰納法で示す

$s := \mathrm{lct}(L; X, 0)$

$\underline{d=1}$ $\rightarrow \exists p \in X$ s.t. $\mathrm{mult}_p(sL) = 1$

$\rightarrow 1 \leq \deg sL \leq sr$

$\rightarrow s \geq \frac{1}{r}$. done.

$\underline{d \geq 2}$ Tを(X, sL)のlc placeとすると、

TがX上の因子のときは $d=1$と同様にsはlower boundをもつ

よってTはX上例外的としてよい。

$C := C_X(T)$, $H \in |A|$ general. s.t. $H \cap C \neq \emptyset$

(H, L_H)にLem$_{d-1}$をつかう。

$\exists\ t = t(d,r)$ s.t. (H, tL_H): klt

しかし $(X, H+sL)$は NOT plt

$\xrightarrow{\text{adjunction}} t < s.$ $\square$

よって $\bigcup_{i=1}^{d} H_i$ を除いては $(\mathbb{P}^d, tC + \sum_{i=1}^{d} H_i)$ は lc

次に H_i への制限を考えて、∵ 次元の Induction より

t をもう少し(uniformに)小さくとれば、Inversion of Adjunction より lcがいえる.

この時 H_i(a stratum)たちが C を制限できるのは Prop 1 の (5.1) の条件からである. □

Rmk) なので $z = \pi(x)$ の周りではよくわからない。 以下 $\boxed{t < \frac{2}{r}}$ と仮定してよい

Step β $D := (1 - \frac{t}{2}) \sum_{i=1}^{d} H_i + \frac{t}{2} C$ & $\varepsilon' := \frac{t}{2}\varepsilon$.

$\Longrightarrow$ (i) $(\mathbb{P}^d, D)$: ε'-lc

(ii) $a(T', \mathbb{P}^d, D) \le 1$

(iii) $-(K_{\mathbb{P}^d} + D)$: ample

∵

(iii) $\deg(K_{\mathbb{P}^d} + D) = -(d+1) + (1 - \frac{t}{2}) d + \frac{t}{2} \deg C$

$$\le -1 - \frac{td}{2} + \frac{t}{2} \cdot r \le \frac{td}{2} < 0.$$

(ii) $a(T', \mathbb{P}^d, D) = (1 - \frac{t}{2}) a(T', \mathbb{P}^d, \sum_{i=1}^{d} H_i) + \frac{t}{2} a(T', \mathbb{P}^d, C)$

$$= \frac{t}{2} \underbrace{a(T', \mathbb{P}^d, C)}_{1 \leftarrow \pi は z で étale だから} \le 1$$

$a(T; X, B)$

(i) E を $\mathbb{P}^d$ 上定める $\boxed{\mathbb{Q}}$ とおく。以下で場合分け。

$\underline{z \in C_{pd}(E)}$ のとき

$$a(E,\mathbb{P}^d,D) \underset{\substack{\text{piecewise}\\\text{linearity}}}{=} (1-\tfrac{\varepsilon}{2})\underbrace{a(E,\mathbb{P}^d,\sum_{i=1}^{d}H_i)}_{\geq 0} + \tfrac{\varepsilon}{2}\underbrace{a(E,\mathbb{P}^d,C)}_{\geq \varepsilon} \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\varepsilon$$

$\underline{z \notin C_{pd}(E)}$ のとき

$$a(E,\mathbb{P}^d,D) = \tfrac{1}{2}\underbrace{a(E,\mathbb{P}^d,\varepsilon C + \sum_{i=1}^{d}H_i)}_{\geq 0 \;\leftarrow\; \text{Step A} \;\&\; z \notin C_{pd}(E)} + \tfrac{1}{2}\underbrace{a(E,\mathbb{P}^d,(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{d}H_i)}_{\geq \varepsilon} \geq \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Step C　$D' \in |-(K_{pd}+D)|_{\mathbb{Q}}$ general　$B := D+D'$

$\longrightarrow$ Claim 3 は したがう

したがって Prop 1 の証明は終えた。

Prop 1 より Key Claim を示すためには、bounded resolution であげた所で Prop 1 をみたす Δ を構成する必要がある。次の sub section で それを議論する。

§8 Δの構成

X, A, Δ を Thm LBd-α_d のものとする. i.e.
$L \in |A|_{\mathbb{Q}}$

$\left\{\begin{array}{l} X: \text{norml}\ \overset{\text{pr}/}{\text{var.}} \\ A: \text{n.a.}\ \text{s.t.}\ A^d < 1 \\ (X, \Delta): \varepsilon\text{-lc} \\ A - \Delta: \text{ample} \end{array}\right.$

X の bounded resolution $X' \longrightarrow X$
の X'上 に reduced SNC div Λ を Prop 1 の(1)−(7)の
仮定をみたすように構成する(この場合 Y上の Δ が なかなかとは後を説明ある)

まず ACC for lct を用いて

$\varepsilon' = \varepsilon'(d, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ s.t. $\left\{\begin{array}{l} \forall Y: d\text{-dim var.} \\ \forall S: \text{reduced}\ \mathbb{Q}\text{-Cartier div} \\ \text{if } (Y, (1-\varepsilon')S): \text{klt} \\ \qquad \Rightarrow (Y, S): \text{lc}. \end{array}\right.$

があ3.

$s := \varepsilon'\text{-lct}(L; X, \Delta)$ とって, T: ε'-lc place of $(X, \Delta + sL)$
s.t. $\dim C_X(T) = 0$
のものを key claim のように取る.

$\rightarrow \exists \varphi: \exists Y \longrightarrow X$ extraction $\quad (a(T, X, \Delta + sL) = \varepsilon' < 1$ だから$)$
$\cup$
T

この $\varphi: (Y, T) \rightarrow X$ と $M := \varphi^* lA$ for some $l > 0$
に対して Thm (bdd local complt version 2)を適用したい

この local complement を用いて Λ を構成していく.

(ナイーブには local complementは reduced でないし N.C でもないので bounded log resolution をとったりして修正する必要があるが、これは後々に議論する)

したがって
Local complete の定理の要せいから

$$l = l(d, r, \varepsilon) > 0 \text{ s.t. } l \underbrace{A_Y}_{\varphi^* A} - (K_Y + T) \text{ : ample}$$

となる l をみつけなければ必要がある.

Task 1 上の l を見つけよ!

最初に次の Claim を示す

Claim 4 $\exists n = n(d, r, \varepsilon) > 0$ s.t. $(X, (1+n)(\Delta + sL))$ is $\frac{\varepsilon'}{2}$-lc except some finite set

∵ By Theorem $Bd - \alpha_{d-1}$, l · cutting by A,

$\exists n = n(d, r, \varepsilon) > 0$ s.t. $(X, (1+2n)(\Delta + sL))$ は klt outside some finite closed set

| Note ③ $s < 1$
| ② $A - (\Delta + sL)$: ample
| となるので Thm $Bd - \alpha_{d-1}$ で A につかうと
| 上のような n がとれる

一方, $(1+n)(\Delta + sL) = \frac{1}{2}(\Delta + sL) + \frac{1}{2}(\Delta + sL + 2n(\Delta + sL))$

より Claim 4 は したがう.

$\psi: W \to X$: $(X, \Delta+sL)$ の log res で $T \subseteq W$ というものをとる.

今, $\Gamma_W := (1+\eta)\psi_*^{-1}(\Delta+sL) + \sum_{\substack{E_i: \psi\text{-excep.} \\ E_i \neq T}} a_i E_i + (1-\varepsilon')T$

(今, a_i はとりあえず some $a_i > 0$, あとで代えていく)

$\rightsquigarrow$ $K_W + \Gamma_W = \psi^*(K_X + \Delta + sL) + \eta\psi_*^{-1}(\Delta+sL) + \sum_{\substack{E_i: \psi\text{-exc} \\ E_i \neq T}} (c_i - 1 + a_i)$ ☆

ここで $c_i = a(E_i, X, \Delta+sL) \leq 1-\varepsilon'$
($\varepsilon' = a(T, X, \Delta+sL)$ より T は cancel する)

次に $K_X + (1+\eta)(\Delta+sL)$ とくらべると

$$K_W + \Gamma_W = \psi^*(K_X + (1+\eta)(\Delta+sL)) + \sum_{\substack{E_i: \psi\text{-exc.} \\ E_i \neq T}} (c_i' - 1 + a_i)E_i + (a' - \varepsilon')T$$

↑ $\dim C_X(E_i) \neq 0 \Rightarrow c_i' \geq \frac{1}{2}\varepsilon'$　　$(a' - \varepsilon') \geq 0$

ここで $a' = a(T, X, (1+\eta)(\Delta+sL))$
$c_i' = a(E_i, X, (1+\eta)(\Delta+sL))$

よってここで

$a_i := 1 - \frac{1}{4}\varepsilon'$ とする.

$\rightsquigarrow$ ・$c_i - 1 + a_i > 0$ $\forall i$
・$c_i' - 1 + a_i > 0$ when $\dim C_X(E_i) \neq 0$ となる

MMP for $(W, \Gamma_W)/X$ を考える.

$W \dashrightarrow Y'$

☆より $\dim C_X(E_i) \neq 0$ となる E_i は contract される. (E_i 内で X でつぶれる general curve は T と交わらないが

さらに ☆ より T はつぶれない。

$A_{Y'} := (Y' \to X)^* A$

Cone thm & bpf thm ⇝ $K_{Y'}+\Gamma_{Y'}+2dA_{Y'}$ is semi-ample

今, $Y' \dashrightarrow Y$ bir. contraction (T がつぶれないから) かつ X のある有限集合を除いて同型 より

$K_Y+\Gamma_Y+2dA_Y$ と push として考えられる.

Claim 5 $K_Y+\Gamma_Y+3dA_Y$ is ample

∵ 今, $a(T,X,\Delta) \ge \varepsilon > \varepsilon' = a(T,X,\Delta+sL)$ より

$\mu_T(\varphi^* L) \ge \frac{\varepsilon-\varepsilon'}{s} > 0$ がわかっている.

C を $\varphi: Y \to X$ でつぶれる general curve とすると

$C.T<0$ より $\varphi^{-1}_* L . C > 0$ となる. (Rem! $\mu_T(\varphi^* L)>0$ だから $\varphi^{-1}_* L.C=0$ にはならない)

(したがって $(K_Y+\Gamma_Y+2dA_Y).C = n\varphi^{-1}_*(\Delta+sL).C \ge n\cdot\varphi^{-1}_*(sL).C>0$

$\rho(Y/X)=1$ より $K_Y+\Gamma_Y+2dA_Y$ は φ-ample.

よって $Y' \dashrightarrow Y$ は T をのぞくと Y の有限個の点を除いて 同型なので $K_Y+\Gamma_Y+2d$ は ne

よって $K_Y+\Gamma_Y+2dA_Y$ は nef かつ φ-ample. ⇝ $K_Y+\Gamma_Y+3dA_Y$ is ample.

(BPFT 必要かな?)

ここで Task 1 を完了する.

Claim 6. $\exists\, l = l(d, r, \varepsilon) > 0$ s.t. $lA_Y - (K_Y + T)$: ample.

(∵) $\alpha := \dfrac{\varepsilon'}{\mu_T(\varphi^*(\Delta + sL))}$ Note $\mu_T(\varphi^*(\Delta + sL)) \geq \varepsilon - \varepsilon'$

$$lA_Y - (K_Y + T) = \underbrace{\frac{1+\alpha}{n}(K_Y + P_Y + 3d A_Y)}_{①} + \underbrace{\left(l - \frac{3d(1+\alpha)}{n}\right) A_Y}_{②} - \underbrace{\left(1 + \frac{1+\alpha}{n}\right)\varphi^*(K_X + \Delta + sL)}_{③} - \underbrace{\alpha\varphi^*(\Delta + sL)}_{④}$$

ここで $K_Y + T = \left(1 + \dfrac{1+\alpha}{n}\right)\varphi^*(K_X + \Delta + sL) + \alpha\varphi^*(\Delta + sL) - \dfrac{1+\alpha}{n}(K_Y + P_Y)$

- $\varphi^*(K_X + \Delta + sL) = K_Y + \varphi_*^{-1}(\Delta + sL) + (1 - \varepsilon')T$
- $\varphi^*(K_X + \Delta + sL) = (K_Y + P_Y - n\varphi_*^{-1}(\Delta + sL))$ を用いた.
- $\alpha\varphi^*(\Delta + sL) = \alpha\varphi_*^{-1}(\Delta + sL) + \varepsilon' T$

∴ Claim 5 より ① は ample.

② − ③ − ④ は $A - \Delta$ と $A - sL$ は ample で
$l \gg 0$ で $lA - K_X$ ample (X は bdd)
$\| \; l(d, \varepsilon, r)$

より ... nef & big となる □

次の Task として.

Task 2 Prop 1 の仮定をみたす bdd res X' 上に Δ', Λ を構成せよ

今. Thm (Bd. bal Cmp. version 2) とつなげると,

$\exists n = n(d) \in \mathbb{N}$ & $\exists R_Y \underset{\mathbb{Q}}{\sim} (n+1) l A_Y - n(K_Y + T)$

s.t. $\Delta_Y := T + \frac{1}{n} R_Y$ & $\varphi_* \Delta_Y$ は.

- (X, Δ) : lc at $x := C_X(T)$
- $K_Y + \Delta_Y = \varphi^*(K_X + \Delta)$
- $n\Delta \in \mathbb{Z}$
- $2lA - (K_X + \Delta)$ は ample ($\Leftarrow n(K_Y + \Delta_Y) \underset{\mathbb{Q}}{\sim} (n+1) l A_Y$ がいえれば)

$\rightsquigarrow$ ... $2lA - (K_X + \Delta)$ ample から

$\underset{\underset{l(d, \varepsilon, v)}{||}}{l} >\!\!> 0$ で $lA - \Delta$ も ample

すれ $\Delta \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ から (X, Δ) は log bdd.

よって今, bdd res. 上に Prop 1 の条件をみたすものでつれればいいので, bdd log res. をとってで (X, Δ) は log sm. とれない.

実際 $\phi: W \to X$: bdd log res of (X, Δ) をとる.

$\Theta := \lceil \phi_*^{-1} \Delta \rceil + \sum_{E_i: \phi\text{-excep.}} E_i$ とする.

T は $(W, \phi_*^{-1}\Delta + \sum_{E_i: \phi\text{-exc}} E_i)$ の lc place なので

T は (W, Θ) の lc place でもある.

(W, Θ) は $\log$ bdd だが

Now: A_W はてきとーにとって、$A_W - \Theta$: ample としていい。

- $A_W - \phi^* A$ ample としてよい
- $\phi^*(K_X + \Delta) + E = K_W + \Delta_W$ とおくと $A_W - \Delta_W$: ample となり

$\Delta_W := \rho\Delta_W + (1-\rho)\Theta$ すると ε''-lc $\forall \rho$ となる ρ が uniform にとれる。
$a(E_i, X, \Delta) < 1$ ε'' (何度もやってることと同じ)

今、$\dim C_W(T) = 0$ としてよい。

このとき、$W; \Delta_W, \Theta$ は Prop 1 の条件の (5) 以外は満たされる。

<u>条件(5)</u> について議論していく。Δ_W を代えて (5) をみたすようにやっていく

まず Claim 4 と同じ議論より

$\exists t := t(d, r, \varepsilon) > 0$ st. $(W, (1+t)\Delta_W)$ は $\frac{\varepsilon''}{2}$-lc except a finite set. となる

$\psi : W' \longrightarrow W$: $\log$ res of $(W, \Delta_W + \Theta)$ をとる
$\supset T$

Claim 4 の後の議論と同様に

土の E_i とはちがうよ。(1以降上の E_i は出てこない)

$$\Omega_{W'} := (1+t)\psi_*^{-1}\Delta_W + \left(1 - \frac{\varepsilon''}{4}\right) \sum_{\substack{E_i : \psi\text{-exc} \\ E_i \neq T}} E_i + (1-a)T$$

ここで $a = a(T, W, \Delta_W)$

MMP for $(W', \Omega_{W'}) / W$; $W' \dashrightarrow (W'', \Omega_{W''})$
$\searrow_W \swarrow \psi''$

を考える。

Nrc. $\cdot\ \psi_* \Omega_{W'} = (1+t) B_W$
$\cdot\ K_{W''} + \Omega_{W''} + 2dA_{W''}$ は semiample (globally)

一方,
$$K_{W''} + \Omega_{W''} = \psi''^*(K_W + \Delta_W) + t\psi''^{-1}_* \Delta_W + \sum (c_i - \tfrac{\varepsilon''}{4}) E_{i,W''}$$
$\psi''(E_i)$: closed pt push of E_i

となる. (これは前と同じ手順)
ここで $c_i = a(E_i, W, \Delta_W)$

さらに, このMMPではTはさわられない.
$$F_{W''} := \sum_{\psi''(E_i,W'') : \text{closed pt}} (c_i - \tfrac{\varepsilon''}{4}) E_{i,W''}$$
$D_{W''} \in \left| \frac{1}{t}(K_{W''} + \Omega_{W''} + 2dA_{W''}) \right|_{\mathbb{R}}$ general.

s.t. $D_{W''} \leq 1 - \varepsilon''$

$D := \psi''_* D_{W''}$

Claim 7 (W, D) is ε''-lc.

(∵) $H \underset{\mathbb{Q}}{\sim} \frac{1}{t}(K_W + \Delta_W + 2dA_W)$ (H は effective とはしない)
と $D_{W''} = \psi''^* H + \psi''^{-1}_* \Delta_W + \frac{1}{t} F_{W''}$

$\rightsquigarrow K_{W''} + \Omega_{W''} + 2dA_{W''}$
$= \psi''^*(K_W + \Delta_W + 2dA_W) + t\psi''^{-1}_* \Delta_W + F_W$

より $D = H + \Delta_W$ となる.

一方、(W, Δ_W): ε'-lc より

$$\psi''^{-1}_{*}\Delta_W + G_{W''} := \psi''^{*}(K_W + \Delta_W) - K_{W''} \leq 1-\varepsilon$$

とらん

$$D_{W'} \underset{\mathbb{R}}{\sim} \frac{1}{t}(K_{W''} + \Omega_{W''} + 2dA_{W''}) = \frac{1}{t}\psi''^{*}(K_W + \Omega_W + 2dA) + \psi''^{-1}_{*}\Delta_W + \frac{1}{t}F_W$$

$$\xrightarrow{\phi} \psi^{*}(K_W + D) = K_{W''} + \psi''^{-1}_{*}\Delta_W + G_{W''} + \underset{\substack{\text{genl.}\\ \leq 1-\varepsilon''}}{\underbrace{D_{W''}}} - \frac{1}{t}F_{W''}$$

$$\psi''^{*}(D - \Delta_W) = \psi''^{*}H = D_{W''} - \psi''^{-1}_{*}\Delta_W + \frac{1}{t}F_W$$

$\rightsquigarrow$ (W, D): ε''-lc □

さてこの D だが ψ'' は W 上の x と有限個の点で除いて同型なので

! (W, Δ) の 0 次元センターレスト は $\mathrm{Supp}\, D$ を含まない.

なぜに $D = \underset{\substack{\text{$\sim_{\mathbb{Q}}$}}}{H} + \Delta_W$ より $A_W - D$ ample としておく!

$\frac{1}{t}(K_W + \Delta_W + 2dA_W)$

よって、Δ の 0 次元センターで x と異なるものを D から remove することを考える.

$y \neq x \in$ Δ の 0 次元 structure & $y \in \mathrm{Supp}\, D$ とする. $f: W_y \to W$ y での b-up

$$f^{*}(K_W + \Delta) = K_{W_y} + \Delta_y$$

E: f-except.

$$f^{*}(K_W + D) = K_{W_y} + D_y$$

$D_y \leq 1-\varepsilon'$ & $\mu_E D_y \geq 1-d \rightsquigarrow D'_y := \beta D_y + (1-\beta)$

$\Theta_{y_i} = \hat{\Lambda} \leftarrow \Lambda$ の strict trans form.

とすると、Θ の 0次元 stratum の個数は Θ_y のそれよりは真に大きい

これ $\Theta_y, W_y, \Delta_{W_y}$ に対して $\psi: W \to W_y$ をとって

MMP をかけるプロセスをすると また、Θ の 0次元 stratum は減る.

Θ の 0次元 stratum の個数は (W, Θ) が lg bdd より有界なので

いつかは、stable になる。それは x 以外に Supp D に Θ の 0次元 stratum がなくなることを意味する □

Key claim の証明

・いったん Prop に適用して

$$W_l \to W_{l-1} \cdots \to W_0 = W \xrightarrow{\psi} X \text{ がつくれたとする}$$

$W \supset \Theta$, ψ: bdd lg res.

その後. $\Lambda := \mathrm{Supp}\,\Theta \cup \mathrm{Exc}(\psi)$ とおくと これは SNC.

 すり) $W_l \to \cdots \to W_0$ は Λ の toroidal b-up でもある. □

$\Lambda \supset \mathrm{Exc}(\psi)$