§ Step 4 Special DAB

究極的には

X: Fano　　$H \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ でえらんで
　　　　　H' 〃 gen.
　　　　　$K_X + H + H'$ ... ample.

なので Fano が出発したと言えて log general type のなんらかの bdd 性があればいいことが言える。

したがってまず BCHM の Model の有限性を用いることでわかる log general type の有限性について触れておく。（cf. HMX "ACC for lct" §9.）

Lem 1　$Z \longrightarrow T$ proj. mor. (Z, Φ): SNC$/T$

Suppose, Φ の irr comp の $Z \to T$ の任意の fiber への制限は irr.（任意の sch. fiber の制限が SNC pair）
- (Z, Φ): klt
- (Z_0, Φ_0) は log gen. type.（ Φ_0 は $0 \in T$ の fibre ）

$0 \le \Theta$ を $\Theta \le \Phi$ となり Φ と同じ Support の div. とする

$\Rightarrow \exists$ 有限個 $f_i : Z \dashrightarrow X_i$ s.t. if $f: Z_t \dashrightarrow Y$: lc model of (Z_t, Ψ) for some $t \in T$ & $\Theta_t \le \Psi \le \Phi_t$

$\Rightarrow \exists i$　$f \simeq f_i$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, dashed, "f_i"] \arrow[dr] & & X_i \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

∵ By invariance of log pluri-genera, $K_Z + \Phi$ は T 上 big

$\rightsquigarrow$ $\exists D \ge 0$ s.t. $D \sim_{T, \mathbb{R}} K_Z + \Phi$

$0<\varepsilon\ll 1$ をとり

$B := \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\Gamma$?

$\rightsquigarrow$ $(Z, B+\Xi)$: KLT

さらに $\exists\, \Theta' \le \Theta$ s.t. $K_Z+\Theta = \varepsilon(K_Z+\Xi)+(1-\varepsilon)(K_Z+\Theta')$

$\Theta' \geq 0$ となるように $\varepsilon \ll 1$ をとる。 $\left(\Theta' := \frac{1}{1-\varepsilon}(\Theta-\varepsilon\Xi)\right)$

$\Xi' \geq 0$ s.t. $\Xi \geq \Xi' \geq \Theta$ に対して、 $\Xi'' := \frac{1}{1-\varepsilon}(\Theta-\varepsilon\Xi')$ $(\geq \Theta')$

$K_Z+\Xi' \sim_{\mathbb{R},T} (1-\varepsilon)(K_Z+B+\Xi'')$

$\rightsquigarrow$ $\exists f_i : Z \dashrightarrow X_i \quad 1 \le i \le k$

s.t. $\forall g : Z \dashrightarrow X$: lc model of (Z, Ξ') as the above

$\Rightarrow g \simeq f_i$ for some i

今、$\exists\, \Xi'$ s.t. $\Xi'|_{Z_t} = \Xi$ という Ξ' が存在することを示す。
$\vee\!|$
Θ

$g : Z \dashrightarrow X$: lc model of (Z, Ξ')

に対して $g_t = f$ を示せばよいが

今、T を affine とにまとめ

$X = \mathrm{Proj}\ R(Z, k(K_Z+\Xi'))$ より

今、$R(Z, k(K_Z+\Xi')) \xrightarrow[|_{Z_t}]{} R(Z_t, k(K_{Z_t}+\Xi))$ が全射が言えればよい。

これは全射性は Vanishing thm, がしたがう。 $(k \gg 0)$

このLemmaを用いて次の定理がわかる.

Thm 2 $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\mathcal{D} \subseteq \left\{ (X, \operatorname{Supp}\Delta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot X : \text{normal proj. var. of dim } n \\ \cdot K_X+\Delta : \text{ample} \\ \cdot \Delta \geq \delta \\ \cdot a(X,\Delta) > \varepsilon \end{array} \right\}$$

total lg discrep i.e. ε-klt

If $\mathcal{D}$ is log bir bdd,

then $\mathcal{D}$ is bounded.

Proof of Thm 2

$\mathcal{D}$は log bir. bdd だから

$\exists (Z,B) \to T$ s.t. $(X,\Delta) \in \mathcal{D}$, $\exists t \in T$

s.t. $\exists f : X \dashrightarrow Z_t$ bir

& $\cdot \operatorname{Exc}(f^{-1}) \subseteq \operatorname{Supp} B_t$

$\operatorname{Supp} f_* \Delta \subseteq \operatorname{Supp} B_t$

Tを有限個のloc'ly closed setと$(2,B)$をlog resにとりかえて

$(Z,B) \to T$は rel. snc と仮定して良い & T: sm. も仮定して良い

$a := 1-\varepsilon < 1$

$\Delta \geq \;\Rightarrow\; \delta \leq a \leq 1$ である.

$\Phi := aB$

$\Theta := \varepsilon B$

さらに blow up することで (Z_t, Φ_t) は terminal pair と仮定してよい。
$\forall t \in T$

今, $(X, \Delta) \in D$ に対して,

$\exists t \in T$ s.t. $f : X \dashrightarrow Z_t$ bir.

$\& \ \mathrm{Ex} f^{-1} \subseteq \mathrm{Supp}\, \Phi_t$
$\mathrm{Supp}\, f_*\Delta \subseteq \mathrm{Supp}\, \Phi_t$ ととれる,

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[rr, dashed] & & Z_t \end{tikzcd}$$

共通な log resolution

$S := \sum_{E_i : p\text{-exc. div}} E_i$ on W

$\Theta := p_*^{-1}\Delta + aS$

$\longrightarrow K_W + \Theta = p^*(K_X + \Delta) + E.$

$a = 1 - \varepsilon$ かつ (X, Δ) は ε-klt より $E \geq 0$

$\Phi := q_*\Theta$

$\to p^*(K_X + \Delta) + E + F = q^*(K_{Z_t} + \Phi)$

where F: q-exceptional.

$p^*(K_X + \Delta)$: nef $\rightsquigarrow$ q-nef $\underset{q_*(E+F) \geq 0}{\rightsquigarrow}$ $E + F \geq 0$ by the negativity.

⇝ E: X上の因子

$$a(E; Z_t, \Phi_t) \le a(E, Z_t, \Phi) \quad (\because\ \Phi_t \ge \Phi)$$

$$\le a(E; X, 0) \quad (\because\ E + F \ge 0)$$

$$\le 1. \quad (\because\ E は X上にある因子)$$

⇝ E は Z_t 上の因子 ((Z_t, Φ_t) は terminal)

⇝ $Z_t \xrightarrow{g} X$ は birational contraction

⇝ F: p-except.

⇝ g は lc model of (Z_t, Φ)

よって $B' \le B$ で $\mathrm{Supp}\, B' = \mathrm{Supp}\, \Phi$ となる eff. $\mathbb{R}$-div. B' をえらべて.

Φ の supp は B' と一致する.

$\Theta' := \delta B'$, $\Phi = aB'$ について (Lem 1を適用) と $\Theta'_t \le \Phi \le \Phi_t$ より

∴ $(X, 0)$ は log bdd □

(Special BAB)

Thm 3 $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$

Assume that BdVol d & ACC for lct d holds

$$\left\{ X \;\middle|\; \begin{array}{l}(X, B): \varepsilon\text{-lc proj} \ \& \ K_X + B \equiv 0 \ \& \ B \geq \delta. \\ B: \text{big}\end{array} \right\} =: \mathcal{D}$$

is bdd.

$\because$ $X \in \mathcal{D}$ $\quad X \dashrightarrow X''$ $\mathbb{Q}$-fac. anti-canonical model

$\rightsquigarrow \exists\, m = m(d, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$

s.t.

$|-mK_{X''}|$ def a bir

$\mathrel{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}$

$|-mK_X|$

& Bd Vol d $\rightsquigarrow$ $\mathrm{vol}(-K_X) < \overset{\exists}{v}$

$v = v(d, \varepsilon)$

$\rightsquigarrow$ (X, B): bir. log bdd

[既に何度もしたもんし

Note

基本的に Birkar "Anti-canonical ~"

Prop 4.4 だが, M ip.e. (big) でも成り立つ.

これは Weichung Chen の "Bd ——" Prop で説明されている.

No. 21-⑩

Date

$\mathfrak{P}_1$ — 3. $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ fix. $\exists A \leq D$: ample

& $K_X + B + {}^{\exists}tA$: ε'-lc. & ample

$t = t(\varepsilon'; X, B, A)$.

$\xrightarrow{\text{Thm}}$ $\mathcal{D}$: Bdd 🐘

(∵)

vol $(D_i) > (2d)^d$ でとれる.

(∵) Claim A の証明みたいに

B_i' をとって.

$s_i D_i$ で割

$= a_i' K_{X_i} - s_i D_i'$: ample より

$\sim H_i$ gen'l member

s.t. $(X_i, s_i B_i' + H_i)$

: ε'-lc

とすれば $B_i'' = s_i B_i' + \ldots$ とする