No. 16-①

Date

§ Step 1: ACC for lct in dim d
$\Leftarrow$ DAD in dim d-1

基本的に文献: M^{c}Kernan-Prokhorov "Threefold thresholds"
Hacon-M^{c}Kernan-Xu "ACC for lcts"
に沿う.

<u>Step</u> A DAD$_d$ & ACC for lct$_d$ $\Rightarrow$ Global ACC$_d$

<u>Thm Global ACC</u> $d \in \mathbb{N}$, $I \subseteq [0,1]$: DCC

$\exists I_0 \subseteq I$ 有限 s.t.
- (X, Δ): d-dim proj. lc
- $K_X + \Delta \equiv 0$
- $\Delta \in I$

$\Rightarrow \Delta \in I_0$

<u>Step</u> B Global ACC$_d$ $\Rightarrow$ ACC for lct $d+1$.

§§ Subadjunction formula.

X: smooth
$S \subseteq X$: Cartier prime divisor

$\rightarrow (\omega_X \otimes S)|_S = \omega_S$

ハーツホーンとかにのっている adjunction formula.

Weil 因子で書くと
$(K_X + S)|_S = K_S$

一般に特異点のある場合は、

X: normal
S: Weil div

$$\Rightarrow (K_X+S)|_S = K_S + \underbrace{\mathrm{Diff}_S(0)}_{\geq 0}$$

← あるeffective div. があって、それをdifferentと呼んでいる

$\mathrm{Diff}_S(0)$ のけーすーについて述べる。

<u>Def</u> $I \subseteq [0,1]$

$I_+ = \{ j \in [0,1] \mid j$ は I の元の有限和$\}$

$$D(I_+) := \left\{ a \leq 1 \;\middle|\; a = \frac{m-1}{m} + \frac{f}{m},\ m \in \mathbb{N},\ f \in I_+ \right\}$$

↑ hyper standard けー方式

<u>Fact</u> (cf. Flips & Abundance の §16 の Corti の章)

(X, Δ): lg canonical $\quad S \subseteq \llcorner \Delta \lrcorner$: irr. comp. $\quad, I \ni \Delta$

$$\Rightarrow K_S + P = (K_X+\Delta)|_S,\ \text{where}\ P = \mathrm{Diff}_S(0) + (\Delta - S)|_S$$

$$\rightarrow P \in D(I_+)$$

<u>Lemma</u> (レポート) $I \subseteq [0,1]$ s.t. $I \ni 1$

(1) $D(I_+)_+ = D(I_+)$

(2) $D(D(I_+)_+) = D(I_+)$

(3) I: DCC $\Leftrightarrow$ $D(I_+)$: DCC.

⑦ (1) $D(I_+) \subseteq D(I_+)_+$ は自明なので逆を示す.

$$g \in D(I_+)_+ \rightarrow g = \sum \frac{n_i - 1}{n_i} + \frac{f_i}{n_i} \quad \text{for some } n_i \in \mathbb{N},\ f_i \in I_+$$

$g \leq 1 \rightarrow$ $\begin{cases} n_i = 1 \text{ for some } i \text{ かつ 他の } n_j = 0 \text{ (?)} \\ \text{もしくは} \\ \Sigma \text{ は 1つだけの和. i.e. } \sum \frac{n_i - 1}{n_i} = \frac{n_1 - 1}{n_1} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \rightarrow g = \frac{n_i - 1}{n_i} + \frac{f_i}{n_i} + \underbrace{\sum_{i \neq j} f_j}_{= \frac{\sum n_i f_j}{n_i}} \rightarrow g \in D(I_+) \\ \rightarrow \text{ done } g \in D(I_+) \end{cases}$ $\square$

(2) $D(D(I_+)_+) \supseteq D(I_+)_+$ は自明なので逆を示す.

$h \in D(D(I_+)_+)$

$$\rightarrow h = \frac{m-1}{m} + \frac{g}{m} \quad \text{for some } m \in \mathbb{N},\ g \in D(I_+)_+$$

$$(1) \rightarrow g \in D(I_+) \rightarrow g = \frac{n-1}{n} + \frac{f}{n} \quad \text{for some } n \in \mathbb{N},\ f \in I_+$$

$$\rightarrow h = \frac{m-1}{m} + \frac{g}{m} = \frac{m-1}{m} + \frac{\frac{n-1}{n} + \frac{f}{n}}{m}$$

$$= \frac{mn - n + n - 1 + f}{mn}$$

$$= \frac{mn - 1}{mn} + \frac{f}{mn} \rightarrow h \in D(I_+).$$

(3) $I \subseteq D(I_+)$ より $D(I_+) : DCC \Rightarrow I : DCC$

逆は、$D(I_+)$ の非増加列 $b_1 \cdots b_k \cdots$ を考える.

$$b_i = \frac{m_i - 1}{m_i} + \frac{a_i}{m_i} \quad a_i \in I_+,\ m_i \in \mathbb{N} \text{ ととれる.}$$

I_+ はDCCはすぐわかり $\mathbb{N}$ もDCCなので

もし m_i が constant なら a_i のDCCより(?) b_i はDCCとなる.

よって m_i は単調増加としてよい

このとき $b_i \nearrow 1$ となり これは b_i が非減少に矛盾する □

<u>Lem</u> 1 Thm (ACC)$_d$ を仮定する.

$\exists \varepsilon = \varepsilon(d) < 1$ s.t. ($\varepsilon > 0$)

if $(X, (1-\varepsilon)(S_1+S_2+\cdots+S_k))$: klt of dim d
ここで $S_1 \sim S_2$ は prime div で $\mathbb{Q}$-Car.

$\Rightarrow (X, S_1+\cdots+S_k)$: lc

(∵) 背理法で示す. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists X_i, S_1^i, \ldots, S_k^i$ s.t. $(X_i, S_1^i+\cdots+S_k^i)$ is NOT lc

で $(X_i, (1-\frac{1}{i})(S_1^i+\cdots S_k^i))$ is klt

となると $\mathrm{lct}(S_1^i+\cdots S_k^i, X_i, 0) > 1-\frac{1}{i}$

より ACC に矛盾.

§§ Proof of Step A (Global ACC を示す) Gl ACC$_{n-1}$ は成り立つとする

By taking a dlt blowup, (X, Δ) : in Thm Global ACC

は $\mathbb{Q}$-factorial dlt で示せばよい.

今, $K_X+\Delta \equiv 0$ より $S \subset \lfloor\Delta\rfloor$ の Comp とする Δ の Comp で S と交わるもの
は Adjunction で高々有限通りの可能性しかない. 一方他の Comp は
$K_X+\Delta-\varepsilon S \equiv -\varepsilon S$ の MMP を流すことで extract される.

$X \to Y$ は MFS であるとしてよい (このとき DLT 性は崩れるが Negativity から lc 性は保たれる)

$\dim Y > 0 \rightsquigarrow$ { S と交わる Comp は上と同じ. そうでない Comp は S から (X, Δ) の lc center まで辿る, Fiber に制限することで帰着される.

よって. Induction の仮定より ok. $\dim Y = 0$ なら $\rho = 1$ を仮定.

dim $Y=0$ のとき

さらに $\lfloor\Delta\rfloor\neq 0$ のとき $S\subseteq\lfloor\Delta\rfloor$ の Comp に Subadjunction

すると、今 $\rho(X)=1$ だから Δ の全ての Comp は

S と交わる. よって. Induction の仮定より

やはり OK. $\rightsquigarrow (X, \ldots$ klt との

今度は $S\subseteq$ SuppΔ について上と同じ事を繰り返す

dim $Y>0$ のときは.

fiber に制限すると再び S のサーチ… は有限回となるとして.

よって (X, Δ): klt & $\rho(X)=1$ の時に帰着された.
$\mathbb{Q}$-fac

今. $DACC_n$ を仮定しているので.

もし. X が ε-lc となる $\varepsilon>0$ が uniform にとれたとする.

$\rightsquigarrow X$: bdd

$$-K_X\equiv\Delta$$

より

$-mK_X$ が v.a. となる uniform な m がとれ

$H_i\sim -mK_X$ になる h.p. cut を考える $(i=1,\ldots,n-1)$

$C_i=H_1\cap\cdots\cap H_{d-1}\subseteq X_{sm}$ とできるので (Bertini)

$-mK_X.C_i = m^d\cdot\underbrace{(-K_X)^d}$ ← 有限とーり

$\rightsquigarrow \Delta.C_i = m^{d-1}(-K_X)^d$ ← ゆーげんとーり

C_i と Δ の Comp の int # は 自然数なので

- ΔのけーちーがDCC $\Longrightarrow$ Δのけーちーは有限通りとなる Done.

よって
Xのlog discrepは0にいくらでも近くなりえるとしてよい.

一方，このとき (X, Δ)のlog discrepもそうなので，今，log discrepが0に単調減少なfamily (X_i, Δ_i) $\mathbb{Q}$-fac のρ=1を考える.

$(T_i, \Gamma_i) \longrightarrow (X_i, \Delta_i)$ をそのlog discrepのextractionとする
$\cup$
E_i

このとき Γ_iのE_iのけーちーは単調増加かつ Γ_iのけーちーは
まだDCC setの中に入っている.

よって ρ=1の条件はくずれるが (T_i, Γ_i) で示せれば十分である.

よって Δ_iのけーちーで1に近づくものがあると仮定したい.

$\Delta_i \ni A_i$ の A_iのΔ_iでのけーちーが1に近づくとする.
(component)

$K_{X_i} + \Delta_i - \varepsilon A_i \equiv -\varepsilon A_i$ - MMP を考えることで
再び X_iのρは1にしてよい.

一方，取りかえた X_iも特異点もかわりすぎて ε-lcとなる $\varepsilon > 0$
はuniformにとれないと仮定してよいので

X_iのlog dis $\searrow 0$としてよい.

よって $Y_i \longrightarrow X_i$ の $\mathbb{Q}$のlog discrepをcomputeする因子で
extractionをとる。

Date

その exact な因子を B_i とおく。

今 A_{i,Y_i} = A_i の strict transform on Y_i
と
B_i の log pull back $K_{Y_i}+P_i$ of $K_{X_i}+\Delta_i$
の P_i でのけーすー は 1 に収束なので

Lem 1 より

$K_{Y_i} + P_i + (1-a_i)A_{i,Y_i} + (1-b_i)B_i$ は lc

ここで a_i は Δ_i での A_i のけーすー
b_i は P_i での B_i のけーすー。

再び $-B_i$ -MMP を Y_i より はじめると

$$Y_i \dashrightarrow Y_i' \xrightarrow{\pi_i'} X_i'$$

flip 列 ← NOT small contr.

という図式を得る。

- π_i' : MFS ⇒ X_i' ≠ pt ($\rho(Y_i')=2$)

→ ∴ Contradiction for the assump of Induction by taking the restriction on a f.

- π_i' : Divisorial → Case ① A_i' が exceptional でないとき
(A_i' = A_{i,Y_i} の strict transform on Y_i')
→ Case ② A_{i,Y_i}' が exceptional のとき

の場合分けて考える

① のとき

次の "Exchange Trick" という特別な手法により得られる Lem から矛盾がしたがう

Lem 2 $\left\{\begin{array}{l}\text{Global ACC } d-1 \\ \text{LCT の ACC } d\end{array}\right.$ を仮定する.

(X_i, Δ_i) : lc log CY pair で X_i : $\mathbb{Q}$-fac. of dim d, $\rho(X_i)=1$

Δ_i の係数で 1 に近づくものは高々1つしかない.

② のとき

今度はいわゆる "Two ray game" を行う次の Lem を得る.

Lem 3 (Y, Δ) : $\mathbb{Q}$-fac. proj klt of $\rho = 2$ & MDS & $K_Y + \Delta \equiv 0$

R, S を $\overline{NE}(Y)$ の extremal ray とする.

今,
$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow[\substack{\text{flip} \\ (\text{or flop など})}]{} & Y' \\ {\scriptstyle f_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{R'}} \\ X & & X' \end{array}$$

f_S: S に対する cont

Y' ← 別の contraction

$f_{R'}$: R' による contraction とする.

f_S と $f_{R'}$: divisorial として E, E' をそれぞれ exceptional とする

今 a, a' を $K_Y + \Delta = K_Y + P + aE + a'E'_Y$ と P, a, a' を定める. ただし $a, a' \neq 0$ なら E, E'_Y での係数

E'_Y: strict transform

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists b' \text{ s.t. } a' < b' \leq 1 \\ \quad \cdot\ (K_Y + P + E + b'E'_Y) \cdot S = 0 \\ \quad\text{or} \\ \exists b \text{ s.t. } a < b \leq 1 \\ \quad \cdot\ (K_{Y'} + P' + bE_{Y'} + E') \cdot R' = 0 \end{array}\right.$$

P' は P の strict transform

$$\begin{cases} Y = Y_i & E = B_i, \\ Y' = Y_i & , E' = A_{i,Y_i} \end{cases}$$

で適用すると必要ならば Y と Y' をとりかえることで E, E'

$K_{Y_i} + (1-b_i) B_i + \Gamma_i$ は lc

かつ X_i L trivial. これは (X, Δ) が NOT klt とならないことに注意しておく

したがって Lemma ② Lemma i; Lemma, Step Ⓑ を示す。

Mckernan-Prokhorov
たぶんまちがえてる
が応用上ノープロブレム.

Exchange Trick

Claim A (X_i, Δ_i, A_i+B_i) s.t. X_i : d-次元 $\mathbb{Q}$-fac, proj, $\rho=1$. $d\in\mathbb{N}$
, $K_{X_i}+\Delta_i\equiv 0$ かつ klt
, A_i, B_i : Weil div で Δ_i での A_i のけーすーを a_i
B_i のけーすーを b_i
とくなとき

$\lim a_i = a \in [0,1)$ $\lim b_i = b\in(0,1]$

$\Longrightarrow$ subseq. を取り直すことにより

$\exists \Gamma_i \geq 0$ s.t.

(1) $K_{X_i}+\Gamma_i \equiv 0$ & lc

(2) $\mathrm{Supp}\,\Delta_i - \Gamma_i = A_i+B_i$

(3) A_i か B_i の けーすーは constant か lc center of (X_i, Γ_i) を含む.
(けーすーi)

(4) $\lim a_i' = a$ $\quad a_i'$ と b_i' は Γ_i での A_i, B_i のけーすー
$\lim b_i' = b$

(5)

b_i 非減少
非増加 $\Rightarrow b_i'$ もそう. $\longleftarrow$ b_i もしくは a_i が一定

(6) にしないとおかしくなる, ??

a_i, b_i が(広義)単調増加 もしくは (広義)単調減少
$\Rightarrow b_i'$ は定数でない.

☺ $\rho(X_i)=1$ より $A_i\equiv\lambda_i B_i$ for $\lambda_i>0$
必要ならば A_i と B_i を switch して
$i\gg 0$ に対して

$\lambda_i|a_i-a| \leq |b_i-b|$ と仮定してよい.

$$\Theta_t i = \Delta_i + t(a-a_i)A_i - t\lambda_i(a-a_i)B_i$$

$(X, \Theta_2) = \ell(\Rightarrow P_i := \Theta_2$
otherwise, $P_i = \Theta_{\ell c t}\left((a-a_i)A_i - \lambda(a-a_i)B_i,\ X_i,\ \Delta_i\right)\ (\leq 1)$

とすると (1)〜(6) はみたされる。 これとその threshold は 1 になる threshold を考えている.

実際 $\Theta_t \equiv \Delta_i$ である.

よって (1) は ok. (2) も clear

(3) A_i と B_i が switch してることに注意すると,
$a \neq a_i \Rightarrow$ lctenta of (X_i, P_i) は A_i か B_i に含まれる
$a = a_i \rightarrow$ constant

(4) $t \leq 1$ $a \to a$ がしたがう

(5)

$$\lambda_i|a-a_i| \leq |b-b_i| \text{ より. したがう.}$$
$$\vee\!|$$
$$t\lambda_i|a-a_i|$$

実際 $b - b_i' = b - b_i + t\lambda_i(a-a_i)$ より
$b - b_i \geq 0$ のとき $b - b_i - \lambda_i|a-a_i| \geq 0$ なって部分引くとることで(5) は OK

(6) b_i' が定まるとき $b = b_i - t\lambda_i(a-a_i)$

より $a > a_i \Rightarrow b < b_i$
$a < a_i \Rightarrow b > b_i$

Lem 2の証明

Δ_i に [illegible] 単調で近づく Gap A_i B_i の2つがあったとする

Claim A より, Γ_i を用いて (X_i', Γ_i) の lc center は A_i か B_i

を含むが, これは Global ACC

に adjunction をとることで矛盾する.

よって Lem 2 の主張が従う.

§§ 2 ray game

Claim B Y: mml $\mathbb{Q}$-factorial MDS $\rho(Y)=2$. s.t. $\overline{NE}(Y) = R+S$

$g: Y \dashrightarrow Y'$ flip の列とする.

$\varphi_R \downarrow Z \quad \downarrow \varphi_S\ Z$

D: Y上の p.e. div. s.t. $D.S<0$

$\Longrightarrow$ $D.R>0$ & $D_{Y'}.R'>0$ & $D_{Y'}.S'<0$

∵ $D.R \leq 0 \Rightarrow -D$: nef となり $D \neq 0$ かつ D: p.e. に矛盾.

後半は flip を1つずつみていけばしたがう. □

Lem 3の証明

$K_Y+\Delta \equiv 0$ より $D := K_Y+\Gamma+E+E'_Y$: p.e.

今、$D.S>0$ とする.

Extremal contraction of primitive type

$E.S<0$ より $E'_Y.S>0$ となり.

よって $\exists b'<1$ で $K_Y+\Gamma+E+b'E'_Y.S=0$

一方 $K_Y+\Gamma+E+a'E'_Y = K_Y+\Delta+(1-a)E$ より これは S-negative.

$\rightsquigarrow a'<b'$

よって $D.S<0$ と仮定する.

D: p.e. $\rightarrow D_{Y'}.R'>0$ by Claim B

Y' まで先の議論をおこなうとok. (後半のconclusionなる).

最後に. $D.S=0$ の場合は.

$$(K_Y+\Gamma+E+a'E).S=(1-a)E.S<0$$ □

§§ Step ⓑ: Global to local

$$\text{Global ACC}_{d-1} \Rightarrow \text{ACC for lct}_d$$

I: DCC $\Rightarrow D(I)$: DCC

よって $J:=D(I^+)$ に対して Global ACC $d-1$ を

適用し $J_0\subseteq J$ finite

で lc CY のリーダー がすべて J_0 に入る J_0 をとることができる

d-1次元の projective

$$I_0:=\left\{c\in I \;\middle|\; \frac{m-1+f+kc}{m}\in J_0 \text{ for } \exists k,m\in\mathbb{N},\ \exists f\in I_+\right\}$$

<u>Claim C</u> I_0 は有限集合 ← レポ

∵ $\delta:=\min I$ ← DCCなので存在する.

$$1-\frac{m-1+f+kc}{m}\in J_0$$

で $c\neq 0$ とする.

$$\rightarrow kc\leq 1 \rightarrow k<1/\delta$$

よって k は高々有限個).

今、J_0 は有限 で $\exists \varepsilon = \varepsilon(J_0) > 0$

$$\text{s.t.}\quad \underset{\underset{J_0}{\uparrow}}{l} < 1 \Rightarrow l < 1 - \varepsilon.$$

今、$l < 1$ となると $l < 1 - \varepsilon$ となり 特に $1 - \frac{1}{m} < 1 - \varepsilon$
より $m < \frac{1}{\varepsilon}$ となる

よって m も高々有限通り。

今、有限通りのうちで k, l, m を固定して、

c をとって
$$c = \frac{(ml - m + 1) - f}{k}$$

$c \in I$: DCC だが 右辺は $f \in \underbrace{I_+}_{\text{DCC}}$ より ACC.

よって c も有限通り。□

$t_i = \mathrm{lct}(D_i, X_i, \Delta_i)$ $\Delta_i \in I$, $D_i \in I$ で $t_i \nearrow a$ ものがあるとする。

そのとき
$\Omega_i := \Delta_i + t_i D_i$ の係数 も DCC 集合である。

よって Ω_i の係数も含めたものも I としてとりかえる。
この I に対して上で行ったことをすると

I_0 は有限集合である。

(X_i, Ω_i) の1つの maximal non klt center て V_i とする.

さらに $V_i \supset \mathrm{supp} D_i$ となるものをとる. ($\Omega_i = \Delta_i + t_i D_i$ よりとるればよい)

さらに D_i の $\mathrm{comp}\, M_i$ で $M_i \supset V_i$ 且つ

となるものをとる

Ω_i での M_i でのけーすーを c_i としたとき.

$\pi: Y_i \to X_i$ を (X_i, Ω_i) の DLT blow-up とする.

$\dim V_i = \dim X_i - 1$ のとき $V_i = M_i$ より $c_i = 1$ となる

$\dim V_i < \dim X_i - 1$ のとき

$\exists S_i \subseteq Y_i$ s.t. $\cdot\, S_i \twoheadrightarrow V_i$

$\cdot\, S_i$ の $\pi_*^{-1} M_i$

$\pi^*(K_{X_i} + \Omega_i) = K_{Y_i} + \Gamma_i$ とおくと

$d|_{S_i}$

$K_{S_i} + \Gamma_i|_{S_i} \sim_{\mathbb{R}, 0}$

このとき S_i の M_i の けーすーは

$\dfrac{m-1+f+kc_i}{m}$ $m, k \in \mathbb{N}$, $f \in D(\mathbb{L}_t)$)

という形になり

さらに $\pi: S_i \to V_i$ の gen. fiber F_i に制限しても

$M_i|_{F_i}$ のけーすーは $\dfrac{m-1+f+kc_i}{m}$ という形である

irred. comp.

/3 $\frac{\cancel{m-4f}+kc_i}{m} \in J_0$ (Global A.C.C ($_{sd-1}$))

より. c_i は ゆうげん とおりしかおこらない。

c_i が むーげん とーり ということにく

$t_i \to 0$ で Δ_i での M_i のけーすー は DCC をみたさなくなり、矛盾 □

① B_d B_{rd} は $GlobalACC_d$ を示す時に BAB_d の代わりになることを示す。

$BAB_d \Rightarrow GlobalACC_d$ を示すとき

BAB_d は $\rho=1$ の ϵ-F_{ano} で Δ の係数は高々有限通りを言う時に用いた。

$K_X+\Delta\equiv 0$

この状況において、$B_d B_{rd}$ で十分であることを言う

$\epsilon>0,\ d\in\mathbb{N},\ \exists m=m(d,\epsilon)\in\mathbb{N}$ s.t.

X: d-dim ϵ-lc Fano

$\Longrightarrow |-mK_X|$ gives a birational map.

さらに特殊な設定

Thm

$\epsilon>0,\ d\in\mathbb{N},\ \delta>0,\ \exists m=m(\epsilon,d,\delta)\in\mathbb{N}$

X: d-dim. ϵ-lc Fano

$\Longrightarrow |-mK_X|$ gives a bir. map

で十分である

Step3!

係数が DCC と分かっているから minimal がある。

(∵) $1\in I$ と仮定してよい

上の m に対し

$D:=-mK_X$ とおく。

また B を Δ の comp としてその係数を $i\in I$ とする

今、$I_2 := \{\, b_j \mid j=1,\dots,m+1\}$

$$b_j := \begin{cases} \max I\cap[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}] & \text{if } \exists \max \text{ of } I\cap[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \# I_2 \le m+1$

$j>i$ で b_j がとれたとする。

Claim $\lfloor m'(K_X+\Delta+(j-i)B)\rfloor$ big for some $m'=m(d,\epsilon,I)\in\mathbb{N}$.

この m' に対し上の I_2 を考える。

Claim → • $K_X + \frac{1}{m}\lfloor m\Delta + m(j-i)B \rfloor$ big ⇝ $(j-i) \geq \frac{1}{m}$

$m(K_X + \frac{1}{m}\lfloor m\Delta + m(j-i)B \rfloor)$
$=$
$\lfloor m(K_X + \Delta + (i-j)B) \rfloor$

で十分
Fin.
$K_X + \frac{1}{m}\lfloor m\Delta \rfloor \sim 0$
or
NOT p.e.

⇝ $i \in I_2$.

⇝ いはゆーげんとーり.

よって Claim を示せばいいが これは そこそこ大変.

実際 オリジナルの証明では、次の Hacon - McKernan - Xu の定理が引用される.

Thm I : DCC $\subseteq [0,1)$, $d \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{ \mathrm{vol}(K_X + \Delta) \mid K_X + \Delta$: lct & big, $\Delta \in I \}$ は DCC

さらに $\exists m = m(I, d) \in \mathbb{N}$, (X, Δ) as above

s.t. $|\lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor|$ gives bir'l map

HMX は これと ACC for lct と Global ACC を次元に関する Induction で組んで示した.

我々の目的の1つは、この Thm を経由しないで BAB と ACC for lct を同時に Induction で示すことである.

よって上の定理は示さない.

オリジナルの文献.

cf. Effectivity of Iitaka fibrations & pluricanonical systems of polarized pairs. by Birkar - Zhang.

この回は今までの ACC for lct to Global ACC を generalized pair に拡張.

<u>Def</u> (X, B+M) が generalized pair / Z (B: $\mathbb{R}$-Weil div)

とは、$\exists W \xrightarrow{\varphi} X$: proj mor / Z

s.t. $\exists M_W$: nef / Z & $\varphi_* M_W = M$.

・ $K_X + B + M$: $\mathbb{R}$ - Cartier

・ (X, B+M) : (sub) KLT (sub lc) $\Longleftrightarrow$ $\varphi: W \to X$: log resol. s.t. M_W : nef

$\varphi^*(K_X + B + M)$

$= K_W + B_W + M_W$

$B_W \underset{(=)}{<} 1$

B ≥ 0 のとき 單に klt, lc とそれぞれよぶ.

Date

次の2つの定理を示す。

Thm A (ACC for glct)

Λ : DCC $\subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ & $d \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left\{ \mathrm{glct}(D+N; X, B+M) \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot (X, B+M) : \text{lc of dim } d. \\ \cdot M_W = \sum \mu_j \underbrace{M_j}_{\text{nef}/Z} \ \& \ M_j \text{ Carm}, \ \mu_j \in \Lambda \\ \cdot N_W = \sum \nu_k \underbrace{N_k}_{\text{nef}/Z} \ \& \ N_k : \text{Carm}, \nu_k \in \Lambda \\ \cdot B, D \in \Lambda \end{array} \right\}$$

satisfies ACC.

Thm B (Global ACC)

Λ : DCC $\subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ $d \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \Lambda_0 \subseteq \Lambda$: finite. s.t. $(X, B+M)$: d-dim proj. gen. pair., lc

$\cdot$ $K_X + B + M \equiv 0$

$\cdot$ $M_W = \sum \mu_j \underbrace{M_j}_{\text{nef}}$ & M_j Cartier & $\mu_j \in \Lambda$

$\cdot$ $B \in \Lambda$

$\cdot$ $M_j \not\equiv 0 \Rightarrow \mu_j \neq 0$

$\Rightarrow$ $B \in \Lambda_0$.

Originalの証明

$M=0$ のときは 普通のlctの ACC と Global ACC と一致している。(主張が)

実際証明も $M=0$ の場合に帰着させる。

Step(i) Step D_d ⇒ Step A_{d+1}

Step(ii) Step D_d + Step A_{d-1} ⇒ Step A_d

で帰納法を回して示す。Step i については、普通の lct の場合と同じであるので Step (ii) のみ示す。(もう少し深入りする)

(一度目回りは最初からgeneralisedで示した方がよかったかも)

基本的に BCHM レベルの MMP は このgeneralised pairでworkする。

Thm $(X, B+M)$: gen Rlt $/Z$ & B: big $/Z$

⇒ $(X, B+M)$ の scale 付き MMP は terminate する

∵ これは M が nef だが

$B+M \sim \Delta \geq 0$ s.t. (X, Δ): Rlt とできるが

直接 BCHM が使われる。

・ここも McKernan − Prokhorov の

$$\mathrm{LCT}\text{の}\mathrm{ACC}_d + \mathrm{BAB}_d \Rightarrow \mathrm{Glob}\,\mathrm{ACC}_d$$

(実際は BAB_{d-1} だけかえて)

の証明と同様に

もし Thm B_d が成り立たないとすると、

(X_i, B_i+M_i) で B_i の係数は ACC をみたさないで

・(X_i, B_i+M_i) が klt, $\mathbb{Q}$-fac. で $\rho(X_i)=1$

の条件の場合に帰着される。

Original の Birkar − Zhang の証明は Hacon − McKernan − Xu の道具に

あるものだが、実は今回、次の定理が先週と同じ　証明で示される

Thm $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$

$\Rightarrow \exists m = m(d, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$

s.t.
・X : ε-Fano of dim d
・$\exists B+M$ s.t. $(X, B+M)$: gen. pair with
・$B \geq \delta$
・$M_W = \sum \mu_j M_j$, M_j nef Cartier, $\mu_j \geq \delta$
・$K_X + B + M \equiv 0$

$\Rightarrow |-mK_X|$ gives a birat.

よって Step 1 の $M=0$ の証明が同じ様に回り、$M \neq 0$ に拡張すること
ができる。

Note boundary bdd を示す際など Nef Cartier M_j のおかげで volume は さらに上から抑えられ

Step 1 & Step 3 完