On weak Fano varieties with log canonical singularities

東京大学大学院数理科学研究科
権業 善範
E-mail: gongyo@ms.u-tokyo.ac.jp

この報告集では, nef や big などの基本的な用語は [KoM] に従って用いる.

定義 1. 正規複素射影多様体 X と, その上の $\mathbb{Q}$ 係数有効 *Weil*因子 Δ について, $\mathbb{Q}$ 係数 *Weil*因子 $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* 因子の時, (X,Δ) を**対数的対**と呼ぶ. 対数的対 (X,Δ) が**弱対数的 Fano 対**とは, $-(K_X+\Delta)$ が *nef* かつ *big*である時にいう. さらに $\Delta=0$ の時, 単に X が**弱 Fano 多様体**であるという.

定義 2. 対数的対 (X,Δ) とその対数的特異点解消 $\varphi: Y\to X$ をとる. 対数的標準束公式を次のように書く.

$$K_Y=\varphi^*(K_X+\Delta)+\sum a_iE_i,$$

ここで E_i は Y 上の素因子である. このとき,

(1) もし, すべての i に対して $a_i>-1$ が成り立つとき, (X,Δ) は**川又対数的端末対**であるといい,

(2) もし, すべての i に対して $a_i\geq -1$ が成り立つとき, (X,Δ) は**対数的標準対**であるという.

対数的標準弱対数的 Fano 対 (X,Δ) について次のような問題がある (cf. [S, 2.6. Remark-Corollary], [P, 11.1]):

(i) $-(K_X+\Delta)$ は semi-ample か.

(ii) $\mathbb{Q}$-complements は存在するか, すなわち, $K_X+\Delta+D\sim_{\mathbb{Q}}0$ かつ $(X,\Delta+D)$ が対数的標準対となる $\mathbb{Q}$ 係数有効因子 D は存在するか.

(iii) Kleiman-森錐 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐か.

(i) が肯定的に解決されれば (ii) が肯定的に従う. 対数的対 (X,Δ) が川又対数的端末対の場合, これら三つの問題は川又-Shokurov 固定点自由化定理と錐定理により肯定的に従う (cf. [KoM]). また Shokurov は曲面に対してこれら三つの問題を肯定的に解決した (cf. [S, 2.5. Proposition]). さらに高次元の場合も肯定的に解決できると期待されていた.

しかし, 本研究では, 三次元以上の対数的標準弱**対数的** Fano 対の場合, これら三つの問題に対して, 一般には否定的な結論を得た. 実際, plt 弱対数的 Fano 対で反対数的標準因子が semi-ample にならない例を構成した (特に, 三次元のそのような例は [Kar1] と [Kar2] の主結果が成り立たないことを示している). ここでその例を説明する.

例 3. 二次元以上の非特異射影多様体 S で $-K_S$ が *nef* かつ *semi-ample* でない対が存在することはよく知られている. 例えば $\mathbb{P}^2$ の非常に一般の 9 点でのブローアップなどはそうである. 射影多様体 X_0 を射影的正規埋め込み $S\subset\mathbb{P}^N$ の錐とし, 非特異多様体 X を X_0 の頂点でのブローアップとする. 例外因子を E と書く. 次のような図式となっている.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ X_0 \arrow[rr, dashed] & & S. \end{tikzcd}$$

このとき (X,E) は *plt* 弱対数的 *Fano* 対で $-(K_X+E)$ が *semi-ample* でないものとなる. 特に S を楕円曲線上の次数 0 の分裂のしない階数 2 のベクトル束に付随する $\mathbb{P}^1$-束とすると, (X,Δ) は $\mathbb{Q}$-*complements* を持たないことがわかる. また, S を $\mathbb{P}^2$ の非常に一般の 9 点でのブローアップとすると, X の *Kleiman*-森錐は多面錐でなくなる.

この例たちを考察することにより, (X,Δ) が次元 1 以下の lc center を持つ場合, (i)-(iii) の性質は肯定的に得られるのではないかと考える. 実際, 次の定理を得た.

定理 4. 高々対数的標準特異点をもつ 3 次元弱 *Fano* 多様体 X に対して, $-K_X$ は *semi-ample* であり, $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

定理 5. 高々対数的標準特異点をもつ 4 次元弱 *Fano* 多様体 X に対して, 特異点集合が高々1 次元であるとする. このとき $-K_X$ は *semi-ample* であり, $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

特に三次元の場合に注目すると, 高々対数的標準特異点をもつ弱 Fano 多様体に対しては (i)-(iii) の性質が肯定的に得られるが, 対数的標準弱**対数的** Fano 対に対しては得られないことがわかる.

さらに, この定理たちを一般化するための鍵となるのが次の予想である.

予想 6 (アバンダンス予想の特別な場合)**.** 射影的半因子対数的端末対 (射影的 sdlt 対)(S, Δ) に対して, 対数的標準因子 $K_S + \Delta$ が数値的に自明であるとする. このとき $K_S + \Delta$ は $\mathbb{Q}$-線形的に自明である.

この予想は極小モデル理論における重要な予想の一つである. 様々な数学者たちの貢献があり, 三次元まで証明されている (cf. [F1]). また, 川又対数的端末特異点の時, この予想は中山, Ambro らにより証明された. ここで注意として, S は一般には可約である. この sdlt とは, いわば可約な多様体に対する dlt 対であり, 以下のものである:

定義 7. 純 d 次元被約 S_2-スキーム X と, その上の $\mathbb{Q}$ 係数有効 *Weil* 因子 Δ について, $\mathbb{Q}$ 係数 *Weil* 因子 $K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* 因子であるとする. さらに X が余次元 1 で正規交叉を仮定する. 既約分解を $X = \bigcup X_i$ とする. 正規化を $\nu : X' := \coprod X'_i \to X = \bigcup X_i$ とする. ここでいう正規化とは各既約成分を正規化をして非交和をとったものをさす. スキーム X 上の $\mathbb{Q}$-因子 Θ を $K_{X'} + \Theta := \nu^*(K_X + \Delta)$ を満たす因子として定義する, そして $\Theta_i := \Theta|_{X'_i}$ をおく. この対 (X, Δ) が**半因子的対数端末対** (略して, **sdlt**) とは, X_i が正規でかつ (X'_i, Θ_i) は *dlt* を満たすときをいう.

予想 6 は四次元以上について S が既約な場合ですら未解決であったが, 著者は最近, 予想 6 の一般次元の証明に成功した (cf. [G2]). しかし, このシンポジウムの時にはまだ予想であったので, ここでは予想としておく. この予想を用いて次の結果が得られる.

定理 8. 次元 $d-1$ の予想 6 が正しいと仮定する. 対数的対 (X, Δ) を次元 d の対数的標準弱対数的 *Fano* 対 (X, Δ) とする. このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々1 次元ならば $-(K_X + \Delta)$ は *semi-ample* である.

ここで定理 8 の証明の概要を説明する. ここで証明のキーポイントは次のことである.

(1) ”よい”dlt ブローアップをとる, i.e. 任意の lc センターの和集合上で代数的ファイバー空間となるようにとれる (これは [F2] の結果である),

(2) 川又-Shokurov の固定点自由化定理のテクニックより lc center の全体和集合上で semi-ample を証明すれば十分である,

(3) ここでは可約な多様体を扱わなければならない, そして

(4) 1 つ次元の低い半因子的対数端末対に対するアバンダンス予想を用いて切断たちを張り合わせる.

実際, ここでは三次元の場合を証明しよう. [F2, Theorem 10.5] より, 次を満たす双有理写像 $\varphi : Y \to X$ をとれる (これが上でいう”よい”dlt ブローアップである).

(i) Y は, $\mathbb{Q}$-分解的な多様体である,

(ii) Γ を $K_Y + \Gamma = \varphi^* K_X$ をみたすように取ると (Y, Γ) は dlt 対,

(iii) Γ の係数は全て 1 であり, 全ての φ-例外因子は Γ のサポートの中に現れる, そして

(iv) $\{C_i\}$ を任意の lc center の族とする, さらに $W = \bigcup C_i$, Γ_W を φ によって像が W に含まれる Γ の成分の和集合とする. このとき $(\varphi|_{\Gamma_W})_* \mathcal{O}_{\Gamma_W} = \mathcal{O}_W$ が成り立つ.

klt でないところの全体集合 C とおき, その既約分解を $C = \bigcup C_i$ とする. さらに, 便宜上次のように集合を定義しておく.

$$\Sigma := \{i | (-K_X)|_{C_i} \equiv 0\},\ C' := \bigcup_{i \in \Sigma} C_i,\ と\ C'' := \bigcup_{i \notin \Sigma} C_i.$$

ここでわかることだが, $-(K_X)|_{C''}$ は ample であることがわかる. また, S'' を φ によって像が C'' に含まれる Γ の成分の和集合とすると, $(K_Y + \Gamma)|_{S''} = K_{S''} + \Gamma_{S''} = \varphi|_{S''}^* (D|_{C''}) \equiv 0$ となる. ここで二次元の予想 6 (二次元なので定理!) により, $K_{S''} + \Gamma_{S''} \sim_{\mathbb{Q}} 0$ となる. ここで, ”よい”dlt ブローアップの最後の条件から $D|_{C''} \sim_{\mathbb{Q}} 0$ が従う. ここで $D|_{C'}$ が ample なので $C' \cap C''$ での値を調整することにより $\mathcal{O}(mD|_{C''})$ の消えない切断が C 上に延長することができる. それにより, $D|_C$ は semi-ample となる. ここ

で, 川又-Shokurov の固定点自由化定理の証明を見ることにより, $-K_X$ は semi-ample となる.

次に, Kleiman-森錐の有理多面性について説明する. (iii) の性質の証明に鍵となるのは, 次の Ambro と藤野による任意の対数的対に対する錐定理 ([A, Theorem 5.10], [F2, Theorem 16.5]) である.

定理 9. 対数的対 (X, Δ) に対して, 次が成り立つ.

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X+\Delta\geq 0} + \overline{NE}(X)_{\mathrm{Nlc}(X,\Delta)} + \sum R_j,$$

ここで R_j は $(K_X+\Delta)$-端末線であり, $\{R_j\}$ は局所有限である.

定理 9 の中に現れる $\mathrm{Nlc}(X,\Delta)$ は対数的標準特異点でない場所にあるスキーム構造を入れたものであり, $\overline{NE}(X)_{\mathrm{Nlc}(X,\Delta)}$ はそれ上の有効的 1-サイクル全体の閉包の像である. 詳しい定義は [F2] を見てほしい. これを用いて次が得られる.

定理 10. 対数的対 (X, Δ) を次元 d の対数的標準弱対数的 *Fano* 対 (X, Δ) とする. このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々1 次元ならば *Kleiman-*森錐 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

実際, 定理 4 と定理 5 はこれらの系である.

参考文献

[A] F. Ambro, *Quasi-log varieties*, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233.

[F1] O. Fujino, *Abundance Theorem for semi log canonical threefolds*, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.

[F2] O. Fujino, *Fundamental theorems for the log minimal model program*, preprint.

[G1] Y. Gongyo, *On weak Fano varieties with log canonical singularities*, preprint.

[G2] Y. Gongyo, *Abundance theorem for numerical trivial (semi-)log canonical divisors*, preprint.

[Kar1] I. V. Karzhemanov, *Semiampleness theorem for weak log Fano varieties*, Russ. Acad. Sci. Sb. Math. **197** (2006), 57–64.

[Kar2] I. V. Karzhemanov, *Base point free theorem for weak log Fano threefolds*, preprint.

[KoM] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. 134 (1998).

[P] Y. G. Prokhorov, *Lectures on complements on log surfaces*, MSJ Memoirs 10 (2001).

[S] V. V. Shokurov, *Complements on surfaces*, J. Math. Sci. **107** (2000), no. 2, 3876–3932.