On weak Fano varieties with log canonical singularities

権業善範*

東京大学大学院数理科学研究科

1 準備

この報告集では, nef や big などの基本的な用語は [KoM] または [KaMM] に従って用いる.

定義 1.1. 正規複素射影多様体 X と, その上の $\mathbb{Q}$-係数有効 *Weil* 因子 Δ について, $\mathbb{Q}$-係数 *Weil* 因子 $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* 因子の時, (X,Δ) を**対数的対**と呼ぶ. 対数的対 (X,Δ) が**弱対数的 Fano 対**とは, $-(K_X+\Delta)$ が *nef* かつ *big* である時をいう. さらに $\Delta=0$ の時, 単に X が**弱 Fano 多様体**であるという.

定義 1.2. 対数的対 (X,Δ) とし, その対数的特異点解消 $\varphi: Y\to X$ をとする. 対数的標準束公式を次のように書く.

$$K_Y=\varphi^*(K_X+\Delta)+\sum a_iE_i,$$

ここで E_i は Y 上の素因子である. このとき,

(1) もし, すべての i に対して $a_i>-1$ が成り立つとき, (X,Δ) は**川又対数的端末対**であるといい,
(2) もし, すべての i に対して $a_i\geq -1$ が成り立つとき, (X,Δ) は**対数的標準対**であるという.

2 問題

対数的標準弱対数的 Fano 対 (X,Δ) について次のような問題がある (cf. [S, 2.6. Remark-Corollary], [P, 11.1]):

(i) $-(K_X+\Delta)$ は semi-ample か.
(ii) $\mathbb{Q}$-complements は存在するか, すなわち, $K_X+\Delta+D\sim_{\mathbb{Q}}0$ かつ $(X,\Delta+D)$ が対数的標準対となる $\mathbb{Q}$-係数有効因子 D は存在するか.
(iii) Kleiman-森錐 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐か.

(i) が肯定的に解決されれば (ii) が肯定的に従う. 対数的対 (X,Δ) が川又対数的端末対の場合, これら三つの問題は川又-Shokurov 固定点自由化定理と錐定理により肯定的に従う (cf. [KoM]). また Shokurov は曲面に対してこれら三つの問題を肯定的に解決した (cf. [S, 2.5. Proposition]). さらに高次元の場合も肯定的に解決できると期待されていた.

* gongyo@ms.u-tokyo.ac.jp

3 主結果 (反例)

しかし, 本研究では, 三次元以上の対数的標準弱対数的 Fano 対の場合, これら三つの問題に対して, 一般には否定的な結論を得た. 実際, plt 弱対数的 Fano 対で反対数的標準因子が semi-ample にならない例を構成した (特に, 三次元のそのような例は [Kar1] と [Kar2] の主結果が成り立たないことを示している). ここでその例を説明する.

例 3.1. 二次元以上の非特異射影多様体 S で $-K_S$ が *nef* かつ *semi-ample* でない対が存在することはよく知られている. 例えば $\mathbb{P}^2$ の非常に一般の 9 点でのブローアップなどはそうである. 射影多様体 X_0 を射影的正規埋め込み $S \subset \mathbb{P}^N$ の錐とし, 非特異多様体 X を X_0 の頂点でのブローアップとする. 例外因子を E と書く. 次のような図式となっている.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ X_0 \arrow[rr, dashed] & & S. \end{tikzcd}$$

このとき (X, E) は *plt* 弱対数的 *Fano* 対で $-(K_X + E)$ が *semi-ample* でないものとなる. 特に S を楕円曲線上の次数 0 の分裂のしない階数 2 のベクトル束に付随する $\mathbb{P}^1$-束とすると, (X, Δ) は $\mathbb{Q}$-*complements* を持たないことがわかる. また, S を $\mathbb{P}^2$ の非常に一般の 9 点でのブローアップとすると, X の *Kleiman*-森錐は多面錐でなくなる.

4 主結果 (肯定的な結果)

この例たちを考察することにより, (X, Δ) が高々次元 1 以下の lc center を持つ場合, (i)-(iii) の性質は肯定的に得られるのではないかと考える. 実際, 次の定理を得た.

定理 4.1. 高々対数的標準特異点をもつ 3 次元弱 *Fano* 多様体 X に対して, $-K_X$ は *semi-ample* であり, $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

定理 4.2. 高々対数的標準特異点をもつ 4 次元弱 *Fano* 多様体 X に対して, 特異点集合が高々 1 次元であるとする. このとき $-K_X$ は *semi-ample* であり, $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

特に三次元の場合に注目すると, 高々対数的標準特異点をもつ弱 Fano 多様体に対しては (i)-(iii) の性質が肯定的に得られるが, 対数的標準弱**対数的** Fano 対に対しては一般には得られないことがわかる.

4.1 Semi-ample 性について

さらに, この定理たちの Semi-ample 性について高次元の場合へ一般化するための鍵となるのが次の予想である.

予想 4.3 (アバンダンス予想の特別な場合)**.** 射影的半因子対数的端末対 (射影的 sdlt 対)(S, Δ) に対して, 対数的標準因子 $K_S + \Delta$ が数値的に自明であるとする. このとき $K_S + \Delta$ は $\mathbb{Q}$-線形的に自明である.

この予想は極小モデル理論における重要な予想の一つである. 様々な数学者たちの貢献があり, 三次元まで証明されている (cf. [F1]). また, 川又対数的端末特異点の時, この予想は中山氏, Ambro 氏らにより証明された. ここで注意として, S は一般には可約である. この sdlt とは, いわば可約な多様体に対する dlt 対であり, 以下の

ものである:

定義 4.4. 純 d 次元被約 S_2-スキーム X と，その上の $\mathbb{Q}$-係数有効 *Weil* 因子 Δ について，$\mathbb{Q}$-係数 *Weil* 因子 $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* 因子であるとする．さらに X が余次元 1 で正規交叉を仮定する．既約分解を $X=\bigcup X_i$ とする．正規化を $\nu: X' := \coprod X_i' \to X = \bigcup X_i$ とする．ここでいう正規化とは各既約成分を正規化をして非交和をとったものをさす．スキーム X 上の $\mathbb{Q}$-因子 Θ を $K_{X'}+\Theta := \nu^*(K_X+\Delta)$ を満たす因子として定義する，そして $\Theta_i := \Theta|_{X_i'}$ をおく．この対 (X,Δ) が**半因子的対数端末対** (略して, **sdlt 対**) とは，X_i が正規でかつ (X_i', Θ_i) は *dlt* を満たすときをいう．

予想 4.3 は四次元以上について S が既約な場合ですら未解決であったが, 著者は最近, 予想 4.3 の一般次元の証明に成功した (cf. [G2]). しかし, このシンポジウムの時にはまだ予想であったので, とりあえず, ここでは予想としておく (後のセクション 6 で詳しく触れる).
この予想を用いて次の結果が得られる.

定理 4.5. 次元 $d-1$ の予想 4.3 が正しいと仮定する．対数的対 (X,Δ) を次元 d の対数的標準弱対数的 *Fano* 対とする．このとき，(X,Δ) の任意の *lc center* が高々 1 次元ならば $-(K_X+\Delta)$ は *semi-ample* である．

ここで定理 6.7 の証明の概要を説明する．証明のキーポイントは次のことである．

(1) ”よい”dlt ブローアップをとる, i.e. 任意の lc センターの和集合上で代数的ファイバー空間となるようにとれる (これは [F2] の結果である),
(2) 川又-Shokurov の固定点自由化定理のテクニックより $-(K_X+\Delta)$ を lc center の全体和集合上に制限して semi-ample を証明すれば十分である,
(3) ここでは可約な多様体を扱わなければならない, そして
(4) 1 つ次元の低い半因子的対数端末対に対するアバンダンス予想を用いて切断たちを張り合わせる．

実際, ここでは三次元の場合を証明しよう．[F2, Theorem 10.5] より, 次を満たす双有理写像 $\varphi: Y \to X$ をとれる (これが上でいう”よい”dlt ブローアップである).

(i) Y は, $\mathbb{Q}$-分解的な多様体である,
(ii) Γ を $K_Y+\Gamma=\varphi^*K_X$ をみたすように取ると (Y,Γ) は dlt 対,
(iii) Γ の係数は全て 1 であり, 全ての φ-例外因子は Γ のサポートの中に現れる, そして
(iv) $\{C_i\}$ を任意の lc center の族とする, さらに $W=\bigcup C_i$, Γ_W を φ によって像が W に含まれる Γ の成分の和集合とする．このとき $(\varphi|_{\Gamma_W})_*\mathcal{O}_{\Gamma_W}=\mathcal{O}_W$ が成り立つ．

klt でないところの全体集合 C とおき, その既約分解を $C=\bigcup C_i$ とする．さらに, 便宜上次のように集合を定義しておく．

$$\Sigma := \{i | (-K_X)|_{C_i} \equiv 0\},\ C' := \bigcup_{i\in\Sigma} C_i,\ \text{と}\ C'' := \bigcup_{i\notin\Sigma} C_i.$$

ここでわかることだが, $-(K_X)|_{C''}$ は ample であることがわかる．また, S'' を φ による像が C'' に含まれる Γ の成分の和集合とすると, $(K_Y+\Gamma)|_{S''}=K_{S''}+\Gamma_{S''}=\varphi|_{S''}^*(D|_{C''})\equiv 0$ となる．　ここで二次元の予想 4.3 (二次元なので定理!, cf. [AFKM]) により, $K_{S''}+\Gamma_{S''}\sim_{\mathbb{Q}} 0$ となる．ここで, ”よい”dlt ブローアップの最後の条件から $D|_{C''}\sim_{\mathbb{Q}} 0$ が従う. また $D|_{C'}$ が ample なので $C'\cap C''$ での値を調整することにより $\mathcal{O}(mD|_{C''})$ の消えない切断が C 上に延長することができる．それにより, $D|_C$ は semi-ample となる．ここで, 川又-Shokurov の固定点自由化定理の証明を見ることにより, $-K_X$ は semi-ample となる．

4.2 錐について

次に, Kleiman-森錐の有理多面性について説明する. (iii) の性質の証明の鍵は, 次の Ambro 氏と藤野氏による任意の対数的対に対する錐定理 ([A, Theorem 5.10], [F2, Theorem 16.5]) である.

定理 4.6. 対数的対 (X, Δ) に対して, 次が成り立つ.

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X+\Delta \geq 0} + \overline{NE}(X)_{\mathrm{Nlc}(X,\Delta)} + \sum R_j,$$

ここで R_j は $(K_X + \Delta)$-端末線であり, $\{R_j\}$ は局所有限である.

定理 5.1 の中に現れる $\mathrm{Nlc}(X, \Delta)$ は対数的標準特異点でない場所にあるスキーム構造を入れたものであり, $\overline{NE}(X)_{\mathrm{Nlc}(X,\Delta)}$ はそれ上の有効的 1-サイクル全体の閉包の像である. 詳しい定義は [F2] を見てほしい. これを用いて次が得られる.

定理 4.7. 対数的対 (X, Δ) を次元 d の対数的標準弱対数的 *Fano* 対とする. このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々 1 次元ならば *Kleiman*-森錐 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

実際, 定理 4.1 と定理 4.2 はこれらの系である.

5 アバンダンス予想について

折角なので, [G2] についても少し触れておく. 次の予想がアバンダンス予想と呼ばれる.

予想 5.1 (アバンダンス予想)**.** 対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする. このとき $\nu(K_X + \Delta) = \kappa(K_X + \Delta)$ が成り立つ. さらに, もし $K_X + \Delta$ が *nef* の時, それは *semi-ample* である.

数値的対数的小平次元 $\nu(K_X + \Delta)$ や対数的小平次元 $\kappa(K_X + \Delta)$ については, [N] を参照してほしい. ここでは, これらの定義は使わない. 上の予想は極小モデル理論においてとても重要な予想である. 実際, 予想 6.1 から極小モデル予想が従う (cf. [B]).
今回扱うのは, 予想 6.1 の (X, Δ) が極小モデルかつ $\nu(K_X + \Delta) = 0$ の場合 (i.e. $K_X + \Delta \equiv 0$ の場合) である. まず次を得ることができる.

定理 5.2. 対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする. さらに $K_X + \Delta \equiv 0$ を仮定する. このとき $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ が成り立つ.

先に述べたように, この結果は川又対数的端末対の場合は [A], [N] により知られていた. 今回, 川又対数的端末対の場合の結果と [BCHM] を組み合わることによる対数的標準対まで広げることができた. また, この仕事を終えてから知ったことだが, 定理 6.2 は [CKP] のように Simpson の結果 [Sim] を用いることでも証明できる (cf. [Ka]). しかしながら我々の証明には Simpson の結果は必要でない.
次に半対数的標準対に対する定理 6.2 を考え, それを解決する. ここで**半対数的標準対**は次のような定義である.

定義 5.3. 純 d 次元被約 S_2-スキーム X と, その上の $\mathbb{Q}$-係数有効 *Weil* 因子 Δ について, $\mathbb{Q}$-係数 *Weil* 因子 $K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* 因子であるとする. さらに X が余次元 1 で正規交叉を仮定する. 既約分解を $X = \bigcup X_i$ とする. 正規化を $\nu : X' := \coprod X'_i \to X = \bigcup X_i$ とする. ここでいう正規化とは各既約成分を正規化をして非交和をとったものをさす. スキーム X 上の $\mathbb{Q}$-因子 Θ を $K_{X'} + \Theta := \nu^*(K_X + \Delta)$ を満たす因子として定義する, そして $\Theta_i := \Theta|_{X'_i}$ をおく. この対 (X, Δ) が**半対数標準対** (略して, **slc 対**) とは, (X'_i, Θ_i) は lc を満たすとき

をいう．特に *sdlt* 対は *slc* 対である．

定理 5.4. 対 (X, Δ) を射影的半対数的標準対とする．さらに $K_X + \Delta \equiv 0$ を仮定する．このとき $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ が成り立つ．

この証明は基本的には [F1] の枠組みを [BCHM] を用いながら遂行していく．そのとき必要な鍵となる定理は次のものである．

定理 5.5. 対 (X, Δ) を射影的川又対数的端末対とする．さらに $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ を仮定する．このとき十分大きく割り切れる自然数 m に対して $\rho_m(\mathrm{Bir}(X, \Delta))$ は有限群である．

ここで $\rho_m(\mathrm{Bir}(X, \Delta))$ とは B-pluricanonical 表現の像であり, 定義は次で定められる．まず $\varphi : X \dashrightarrow X$ が B-双有理写像とは共通の対数的特異点解消 $\alpha, \beta : W \to X$ が $\varphi \circ \alpha = \beta$ と $\alpha^*(K_X + \Delta) = \beta^*(K_X + \Delta)$ を満たすように存在する固有的双有理写像のことである．さらに,

$$\rho_m : \mathrm{Bir}(X, \Delta) := \{\varphi : X \dashrightarrow X | \varphi \text{ は } B\text{-双有理写像 } \} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(H^0(X, m(K_X + \Delta)))$$

は引き戻しで定義される自然な群準同型写像である．この定理の主張は中村氏–上野氏, Deligne 氏らによるコンパクト Moishezon 多様体上 pluricanonical 表現の有限性 (cf. [NU]) の対数版となっており, (X, Δ) が対数的標準対でかつ $K_X + \Delta$ が nef の条件の下, 藤野氏により予想されている (cf. [F1])．この証明は酒井氏の [S] と同様な手法の開多様体のコンパクト化と有理型関数係数の多重 n-形式の可積分条件を考察することで得られる．

応用として, 定理 6.7 のアバンダンスについての仮定をはずせる．

系 5.6. 対数的対 (X, Δ) を対数的標準弱対数的 *Fano* 対とする．このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々 1 次元ならば $-(K_X + \Delta)$ は *semi-ample* である．

またセクション 4.1 と同様な手法で次も得られる．

系 5.7. 対数的対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする．さらに $K_X + \Delta$ が *nef* かつ *big* であると仮定する．このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々 1 次元ならば $(K_X + \Delta)$ は *semi-ample* である．

6 位相的性質

最後に, 系 6.7 で述べた semi-ample 性が対数的標準特異点を持つ弱 Fano 多様体の基本群の情報を導くことに触れておく．系 6.7 と [HM, Corollary 1.4] により次が得られる．

系 6.1. 対数的対 (X, Δ) を対数的標準弱対数的 *Fano* 対とする．このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々 1 次元ならば, 自然な基本群の間の群準同型写像

$$\pi_1(\mathrm{Nklt}(X, \Delta)) \to \pi_1(X)$$

は全射．ここで $\mathrm{Nklt}(X, \Delta)$ とは全ての *lc center* の和集合である．特に $\mathrm{Nklt}(X, \Delta)$ が単連結ならば X もそう．

7 最後に

今回, この盛大なる城崎新人セミナーへの参加を推薦してくださった京都大学の三井さんに感謝の気持ちを述べるとともに, ご迷惑をおかけしたみなさまにお詫び申し上げます．

参考文献

[AFKM] D. Abramovich, L. L. Y. Fong, J. Kollár and J. McKernan, *Semi log canonical surface*, Flip and Abundance for algebraic threefolds, Astérisque 211 (1992), 139–154.

[A] F. Ambro, The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration, Compositio. Math. 141 (2005), no. 2, 385–403.

[A] F. Ambro, *Quasi-log varieties*, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233.

[B] C. Birkar, On existence of minimal models II, preprint, arXiv:0907.4170, to appear in J. Reine Angew Math.

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon and J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), 405-468.

[CKP] F.Campana, V. Koziarz and M. Păun, Numerical character of the effectivity of adjoint line bundles, preprint, arXiv:1004.0584.

[F1] O. Fujino, *Abundance Theorem for semi log canonical threefolds*, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.

[F2] O. Fujino, *Fundamental theorems for the log minimal model program*, preprint.

[G1] Y. Gongyo, *On weak Fano varieties with log canonical singularities*, preprint.

[G2] Y. Gongyo, *Abundance theorem for numerical trivial log canonical divisors of semi-log canonical pairs*, preprint.

[HM] C. D. Hacon and J. McKernan, On Shokurov's rational connectedness conjecture, Duke Math. J. **138** (2000), no. 1, 119–136.

[Kar1] I. V. Karzhemanov, *Semiampleness theorem for weak log Fano varieties*, Russ. Acad. Sci. Sb. Math. **197** (2006), 57–64.

[Kar2] I. V. Karzhemanov, *Base point free theorem for weak log Fano threefolds*, preprint.

[Ka] Y. Kawamata, On the abundance theorem in the case of $\nu = 0$, preprint, arXiv:1002.2682

[KaMM] Y. Kawamata, K, Matsuda and K, Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 283–360, Adv. Stud. Pure Math., 10, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[KoM] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. 134 (1998).

[NU] I. Nakamura and K. Ueno, An addition formula for Kodaira dimensions of analytic fibre bundles whose fibre are Moišezon manifolds, J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 363–371.

[N] N. Nakayama, *Zarisiki decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, 14. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[P] Y. G. Prokhorov, *Lectures on complements on log surfaces*, MSJ Memoirs 10 (2001).

[S] F. Sakai, *Kodaira dimensions of complements of divisors, Complex analysis and algebraic geometry*, pp. 239–257. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[Sim] C. Simpson, Subspaces of moduli spaces of rank one local systems, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 26 (1993), no. 3, 361–401.

[S] V. V. Shokurov, *Complements on surfaces*, J. Math. Sci. **107** (2000), no. 2, 3876–3932.