論文の要旨

この要旨では, 対の特異点などの基本的な用語は [KoM] に従って用いる.

定義 1. 正規複素射影多様体 X と, その上の $\mathbb{Q}$ 係数有効 *Weil* 因子 Δ について, $\mathbb{Q}$ 係数 *Weil* 因子 $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* 因子の時, (X,Δ) を**対数的対**と呼ぶ. 対数的対 (X,Δ) が**弱対数的 Fano 対**とは, $-(K_X+\Delta)$ が *nef* かつ *big* である時にいう. さらに $\Delta=0$ の時, 単に X が**弱 Fano 多様体**であるという.

対数的標準弱対数的 Fano 対 (X,Δ) について次のような問題がある (cf. [S, 2.6. Remark-Corollary], [P, 11.1]):

(i) $-(K_X+\Delta)$ は semiample か.

(ii) $\mathbb{Q}$-complements は存在するか, すなわち, $K_X+\Delta+D\sim_{\mathbb{Q}}0$ かつ $(X,\Delta+D)$ が対数的標準対となる $\mathbb{Q}$ 係数有効因子 D は存在するか.

(iii) Kleiman-森錐 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐か.

(i) が肯定的に解決されれば (ii) が肯定的に従う. 対数的対 (X,Δ) が川又対数的端末対の場合, これら三つの問題は川又-Shokurov 固定点自由化定理と錐定理により肯定的に従う (cf. [KoM]). また Shokurov は曲面に対してこれら三つの問題を肯定的に解決した (cf. [S, 2.5. Proposition]). さらに高次元の場合も肯定的に解決できると期待されていた.

しかし, 本研究では, 三次元以上の対数的標準弱**対数的** Fano 対の場合, これら三つの問題に対して, 一般には否定的な結論を得た. 実際, plt 弱対数的 Fano 対で反対数的標準因子が semiample にならない例を構成した (特に, 三次元のそのような例は [Kar1] と [Kar2] の主結果が成り立たないことを示している). ここでその概略を説明する. 二次元以上の非特異射影多様体 S で $-K_S$ が nef かつ semiample でない対が存在することはよく知られている. 射影多様体 X_0 を射影的正規埋め込み $S\subset\mathbb{P}^N$ の錐とし, 非特異多様体 X を X_0 の頂点での blow up とする. 例外因子を E と書く. このとき (X,E) は plt 弱対数的 Fano 対で $-(K_X+E)$ が semiample でないものとなる. 特に S を楕円曲線上の次数 0 の分裂のしない階数 2 のベクトル束に付随する $\mathbb{P}^1$-束とすると, (X,Δ) は $\mathbb{Q}$-complements を持たないことがわかる. また, S を $\mathbb{P}^2$ の非常に一般の 9 点での blow up とすると, X の Kleiman-森錐は多面錐でなくなる.

この例たちを考察することにより, (X, Δ) が次元 1 以下の lc center を持つ場合, (i)-(iii) の性質は肯定的に得られるのではないかと考える. 実際, 次の定理を得た.

定理 2. 高々対数的標準特異点をもつ 3 次元弱 *Fano* 多様体 X に対して, $-K_X$ は *semiample* であり, $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

定理 3. 高々対数的標準特異点をもつ 4 次元弱 *Fano* 多様体 X に対して, 特異点集合が高々1 次元であるとする. このとき $-K_X$ は *semiample* であり, $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

特に三次元の場合に注目すると, 高々対数的標準特異点をもつ弱 Fano 多様体に対しては (i)-(iii) の性質が肯定的に得られるが, 対数的標準弱**対数的** Fano 対に対しては得られないことがわかる.
さらに, この定理たちを一般化するための鍵となるのが次の予想である.

予想 4 (アバンダンス予想の特別な場合). 射影的半因子対数的端末対 (射影的 *sdlt* 対)(S, Δ) に対して, 対数的標準因子 $K_S + \Delta$ が数値的に自明であるとする. このとき $K_S + \Delta$ は $\mathbb{Q}$-線形的に自明である.

この予想は極小モデル理論における重要な予想の一つである. 様々な数学者たちの貢献があり, 三次元まで証明されている (cf. [F1]). ここで注意として, S は一般には可約である. この sdlt とは, いわば可約な多様体に対する dlt 対である. 詳しい定義は本論文または [F1] に譲る. また予想 4 は四次元以上について S が既約な場合ですら未解決である.
この予想を用いて次の結果が得られる.

定理 5. 次元 $d-1$ の予想 4 が正しいと仮定する. 対数的対 (X, Δ) を次元 d の対数的標準弱対数的 *Fano* 対 (X, Δ) とする. このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々1 次元ならば $-(K_X + \Delta)$ は *semiample* である.

また, (iii) の性質は, Ambro と藤野による任意の対数的対に対する錐定理 ([A, Theorem 5.10], [F2, Theorem 16.5]) を用いることにより次のように得られる.

定理 6. 対数的対 (X, Δ) を次元 d の対数的標準弱対数的 *Fano* 対 (X, Δ) とする. このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々1 次元ならば *Kleiman*-森錐 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である.

実際, 定理 2 と定理 3 はこれらの系である.

参考文献

[A] F. Ambro, *Quasi-log varieties*, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233.

[F1] O. Fujino, *Abundance Theorem for semi log canonical threefolds*, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.

[F2] O. Fujino, *Fundamental theorems for the log minimal model program*, arXiv:0909.4445.

[Kar1] I. V. Karzhemanov, *Semiampleness theorem for weak log Fano varieties*, Russ. Acad. Sci. Sb. Math. **197** (2006), 57–64.

[Kar2] I. V. Karzhemanov, *Base point free theorem for weak log Fano threefolds*, arXiv:0906.0553.

[KoM] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. 134 (1998).

[P] Y. G. Prokhorov, *Lectures on complements on log surfaces*, MSJ Memoirs 10 (2001).

[S] V. V. Shokurov, *Complements on surfaces*, J. Math. Sci. **107** (2000), no. 2, 3876–3932.