On canonical bundle formulae and subadjunctions

藤野修 (京大理)・權業善範 (東大数理)

この概要では, 対の特異点などの基本的な用語は [KaMM] に従って用いるとする．また全て複素数体上の仕事である．以下, $\mathbb{K}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ もしくは実数体 $\mathbb{R}$ とする．まず次の補題が成り立つ。これは generically finite 射に対する標準因子公式である。

Lemma 1. 射 $f : X \to Y$ を正規多様体の間の *generically finite* 射とする．さらに, ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Δ が存在し, (X, Δ) が *lc* となるとする．このとき, もし $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{K},f} 0$ ならば, ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Γ が存在し (Y, Γ) が *lc* であり, かつ $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{K}} f^*(K_Y + \Gamma)$ をみたす．さらに (X, Δ) が *klt* の場合, Γ を (Y, Γ) も *klt* となるように選べる．

この補題の応用として次の川又 subadjunction 定理 ([K2]) の一般化を得る．

Theorem 2. 正規多様体 X が射影的もしくはアフィンであるとする．さらに, ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Δ が存在し, (X, Δ) が *lc* となるとする．このとき (X, Δ) に関する極小 *lc center* W に対して, ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Δ_W が存在し, $(K_X + \Delta)|_W \sim_{\mathbb{K}} K_W + \Delta_W$ をみたしかつ, (W, Δ_W) が *klt* である．

さらなる応用として, Smith と Schwede による次の問題 ([SS, Remark 6.5]) が解決される．

Theorem 3. 射影射 $f : X \to Y$ を正規射影多様体の間の *generically finite* 射とする．さらに, ある有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ が存在し, (X, Δ) が *klt* かつ $-(K_X + \Delta)$ が豊富であるとする．このとき, ある有効 $\mathbb{Q}$-因子 Γ が存在し (Y, Γ) が *klt* かつ $-(K_Y + \Gamma)$ が豊富である．

次に Ambro による klt 対に対する標準因子公式 ([A, Theorem 4.1]) の lc 対への拡張を試みる．その結果 [A1] と [K1] を合わせて, 次を得る．

Theorem 4. 射影射 $f : X \to Y$ を正規射影多様体の間の射で $\dim Y = 1$ もしくは $\dim X - \dim Y = 1$ とする．さらに，ある有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ が存在し，(X, Δ) が *lc* となるとする．このとき，もし $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}, f} 0$ ならば，ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Γ が存在し (Y, Γ) が *lc* であり，かつ $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{K}} f^*(K_Y + \Gamma)$ をみたす．さらに (X, Δ) が *klt* の場合，Γ を (Y, Γ) も *klt* となるように選べる．

この結果は klt 対の標準因子公式に対するモジュライ部分が b-因子の意味で semi-ample であると言う予想 ([A1, 0. Introduction]) が証明されれば, $\dim Y = 1$ もしくは $\dim X - \dim Y = 1$ という仮定を省くことができる.

参考文献

[A1] F. Ambro, Shokurov's boundary property, J. Differential Geom. **67** (2004), no. 2, 229–255.

[A] F. Ambro, The moduli *b*-divisor of an lc-trivial fibration, Compositio. Math. 141 (2005), no. 2, 385–403.

[K1] Y. Kawamata, Subadjunction of log canonical divisors for a subvariety of codimension 2, *Birational algebraic geometry* (Baltimore, MD, 1996), 79–88, Contemp. Math., **207**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[K2] Y. Kawamata, Subadjunction of log canonical divisors, II. Amer. J. Math. **120** (1998), no. 5, 893–899.

[KaMM] Y. Kawamata, K, Matsuda and K, Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 283–360, Adv. Stud. Pure Math., 10, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[SS] K. Schwede, K. E. Smith, Globally F-regular and log Fano varieties, Adv. Math. **224** (2010), no. 3, 863–894.