$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面上の種数 2 次数 5 の曲線族について

2007 年度　卒業論文
早稲田大学理工学部数理科学科
1G04L033-8
権業善範

概 要

$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面上の直線を一つ固定しその直線を通る 3 次曲面を動かすというアイデアを用いて種数 2 次数 5 の曲線族を具体的に構成した. また非特異 2 次曲面上の $(3,2)$ 型の因子は $(2,3)$ 型の因子にその曲面上で変形できないことを示した.

目 次

1 はじめに

一般に非特異射影曲線は $\mathbb{P}^3$ 内に埋め込めることが知られている．しかし $\mathbb{P}^3$ 内に与えられた射影曲線の定義方程式を求めることは一般的には難しい．種数 0 や 1 の曲線は射影空間の中で具体的な方程式がよく知られている．その一方, 種数 2 の場合は局所的な方程式はよく知られているが射影空間の中で大域的な方程式はあまり知られていないように思われる．そこで本研究では種数 2 の曲線の大域的な方程式系を求めることを目的とする．結果として, 方程式系をただ一つ見つけるだけではなく曲線族として見つけることに成功した (Theorem 3.3 と Theorem 3.5)．ただしこの曲線族に現れるファイバーは特異点を持つ可能性もある．そこでファイバーに対する非特異性の判定法を与えることにより曲線族のパラメーター空間においてファイバーが非特異となる点の位置を具体的に求めることが可能となった (Proposition 3.6).

種数 2 の曲線の定義方程式系を求めるための基本的なアイデアは, $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面 Q 上の直線 ℓ を一つ固定しその直線 ℓ を通る 3 次曲面 S を動かし, 直線 ℓ を除いて得られるスキームの定義方程式系を見つけるというものである．そのアイデアに基づいて求めたいスキームの定義イデアルの生成元を具体的に与え, その生成元を使って曲線族を構成した．この構成において一般的な点のファイバーに対しては種数 2 次数 5 の曲線が現れることがわかるが (Theorem 3.3 と Theorem 3.5), パラメーター空間内のどの点に対応するファイバーが種数 2 次数 5 の曲線になるかということは分からない．しかし, Proposition 3.6 を用いれば, 任意のファイバーを $\mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見たときに, その分岐点を計算するだけで種数 2 次数 5 の曲線がファイバーとなるパラメーター空間での点の位置が把握できる．この Proposition 3.6 は分岐点の情報により非特異性を判定するという興味深い命題であると思われる．それを用いて種数 2 の曲線のモジュライ空間に generically 有限射が伸びる曲線族のパラメーター空間も構成した (Theorem3.12).

種数 2 の曲線の定義方程式系を求める以外に, 種数 2 の曲線は非特異 2 次曲面 Q 上で $(3,2)$ 型もしくは $(2,3)$ 型の因子で得られるが, その二つがファイバーとして現れる曲線族は存在するのかという問題も考えた．本論文では Q 上の多項式 $5t+3$ の Hilbert スキームの連結成分を決定し位相的構造を理解することで否定的に解決した (Theorem 4.18). 本論文を書き終えたあとわかったことだが, 上記のような曲線族が存在することはそのような二つの因子が代数的同値であるよりも強いので交点数の議論だけで同様の結論を得ることができる (Definition 4.14).

2　定義と準備

この節では定義や後に必要となる定理などを紹介する. ただしスキームの定義などは [Har] を参照とし, また初等的な可換代数学の知識は [A-M] などを参照とする. 以下 k は代数閉体とする.

Definition 2.1. k 上スキーム X に対して,

k **上代数的スキーム**. $\Leftrightarrow$ k 上分離的な k 上有限型スキーム.
k **上代数多様体**. $\Leftrightarrow$ k 上代数的 *integral* スキーム.
曲線. $\Leftrightarrow$ 1 次元の k 上 *reduced* 代数的スキーム.
非特異曲線. $\Leftrightarrow$ 1 次元の k 上 *reduced regular* 代数的スキーム.

曲線と非特異曲線の定義に既約性を仮定しないことに注意する. また局所環が *non-regular* になる点を特異点と呼ぶ.

Remark 2.2. 注意として *integral* スキームは局所環が整域では不十分であり, 任意のアファイン開集合の座標環が整域であることが必要である.

Proposition 2.3. スキーム X に対して次が成り立つ.

$$integral. \iff reduced \text{ かつ既約.}$$

Proof. [Har], II, (3.2) 参照. □

Definition 2.4. 次元 r の k 上射影スキーム X に対して, $\chi(\mathscr{O}_X)$ は $\mathscr{O}_X$ の**オイラー標数**と呼ばれ, 次のようなものである. X 上の連接層 $\mathscr{F}$ に対して $h^i(X,\mathscr{F}) := \dim_k H^i(X,\mathscr{F})$ と書き,

$$\chi(\mathscr{F}) := \sum_{i=0}^{r}(-1)^i h^i(X,\mathscr{F}).$$

$$p_a(X) := (-1)^r(\chi(\mathscr{O}_X) - 1)$$

を**算術的種数**と言う.
また X が非特異射影多様体の時, その標準層 ω_X の大域切断からなるベクトル空間の次元を**幾何学的種数**と言い $p_g(X)$ と書く.
X が非特異射影既約曲線の時, $p_a(X) = p_g(X)$ となるので単に $g(X)$ と書き X の**種数**と呼ぶ.

Remark 2.5. C を既約曲線としその正規化を $f : \tilde{C} \longrightarrow C$ とすると, 完全系列

$$0 \to \mathscr{O}_C \to f_*\mathscr{O}_{\tilde{C}} \to \mathrm{Coker} \to 0$$

が存在する.
よってコホモロジーの長完全系列をとると Coker のサポートの次元が 0 次元であることから

$$p_a(C) = g(\tilde{C}) + \dim_k(\mathrm{Coker})$$

が成り立つ. また, $\dim_k(\mathrm{Coker})$ のことを *Singular defect* と呼ぶ.

また次の事実がよく知られている.

Theorem 2.6. 非特異射影多様体 X, Y に対して次が成り立つ.

$$X \text{ と } Y \text{ が双有理同値.} \ \Rightarrow \ p_g(X) = p_g(Y).$$

Proof. [Har], II, (8.19) 参照. □

また非特異射影既約曲線上の可逆層の大域切断のなすベクトル空間の次元を調べるにあたり次の公式が非常に有効である.

Theorem 2.7 (Riemann-Roch の公式)**.** 非特異射影既約曲線 X と X 上の可逆層 (直線束)$\mathscr{L}$ に対して次が成り立つ.

$$h^0(X, \mathscr{L}) - h^0(X, \omega_X \otimes \mathscr{L}^\vee) = \deg\mathscr{L} + 1 - p_g(X).$$

Proof. [Har], IV, (1.3) 参照. □

非特異射影曲面上の曲線を考察するにあたり交点数 (*intersection number*) が役に立つ.

Definition 2.8. 非特異射影曲面 X と X 上の Weil 因子 D, C に対して交点数を $D.C$ と書く.

$$\mathrm{Cl}X \times \mathrm{Cl}X \to \mathbb{Z}; \ (C, D) \mapsto C.D$$

この写像は因子類群上の $\mathbb{Z}$-双線形写像になる. その他にも様々な性質がある. 詳しくは [Har], V, (1.1) もしくは [Bea], (I.2) を参照.

次に非特異射影曲面上の種数公式を呼ばれるものを紹介する.

Theorem 2.9 (種数公式)**.** 非特異射影曲面 X と *effective* 因子 C に対して次が成り立つ.

$$2p_a(C) - 2 = C.(C + K_X)$$

ただし K_X は X の標準因子.

Proof. [Har], V, (1.5) 参照. □

Definition 2.10. 射影多様体 X, Y と *generically* 有限全射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して次を定義する.

$$\deg f := 一般的な点のファイバーの個数.$$

するとこれは f の**次数** (*mapping degree*) と呼び Y の関数体における X の関数体の拡大次数と一致する. また次数 2 の射を **2 重被覆**と呼ぶ.

Theorem 2.11 (Hurwitz の定理)**.** 非特異射影既約曲線 X, Y と次数 n の *separabl* 有限射 $f : X \longrightarrow Y$ と *ramification* 因子 $R_f := \sum_{P \in X} (\mathrm{length}(\Omega_{X/Y})_P)P$ について次が成り立つ.

$$2g(Y) - 2 = n(2g(X) - 2) + \deg(R_f)$$

また *ramification* 因子が *tame* のとき $R_f = \sum_{P \in X} (v_P(t_{f(P)}) - 1)P$ が成り立つ.

ただし $v_P(\cdot)$ は離散付値環 $\mathscr{O}_{X,P}$ での付値関数であり, $t_{f(p)}$ は離散付値環 $\mathscr{O}_{Y,f(P)}$ のパラメーターである.

Proof. [Har], Ⅳ, (2.4) 参照. □

次に因子の言葉を用いて Bezout の定理を紹介する.

Theorem 2.12 (Bezout の定理)**.** $\mathbb{P}^n$ 内の射影多様体 X と $\mathbb{P}^n$ の因子 D に対して D のサポートに X が含まれない時, 次が成り立つ.

$$\deg(D.X) = (\deg D) \cdot (\deg X)$$

ただし $D.X$ は X 上の D との共通部分因子.

Proof. [Har], Ⅱ, Exe6.2 参照. □

Definition 2.13 (種数 2 のモジュライ空間)**.** まず $\mathbb{P}^1$ の相異なる 6 点 $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6$ に対して初めの 3 つ $P_1,\ P_2,\ P_3$ をこの順に $\infty,\ 0,\ 1$ に送る射影変換を ϕ とする.
そして $Q_4 = \phi(P_4),\ Q_5 = \phi(P_5),\ Q_6 = \phi(P_6)$ とし $\infty,\ 0,\ 1,\ Q_4,\ Q_5,\ Q_6$ を $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6$ の"標準化"と呼ぶ.

次に $X := \{(a, b, c) | a,\ b,\ c \neq 0,\ 1$ かつ $a,\ b,\ c$ は相異なる.$\} \subset \mathbb{A}^3$ に次のように 6 次対称群 S_6 からの作用を考える.

$$g \in S_6,\ \tilde{g} : X \longrightarrow X;\ (a, b, c) \mapsto (a', b', c')$$

ただし (a', b', c') は次から定まる X の点である.

$$\begin{aligned} (a, b, c) &\mapsto (\infty, 0, 1, a, b, c) \mapsto g(\infty, 0, 1, a, b, c) \\ &\overset{\text{標準化}}{\mapsto} (\infty, 0, 1, a', b', c') \mapsto (a', b', c') \end{aligned}$$

S_6 によるこの作用での X における軌道空間を**種数 2 の曲線のモジュライ空間**と呼ぶ. 実際, 種数 2 の曲線の同型類のなす粗モジュライ空間になることが知られている.

3　種数2次数5の曲線族の具体的な構成

まず $\mathbb{P}^3$ 内において $q := xw - yz$ で定義される非特異2次曲面を Q とし, それに含まれる $x = y = 0$ で定義される直線を ℓ とする．また $d+1$ 次曲面 S が ℓ を含む時, S の定義方程式は $fx + gy$ ($\exists f,\ g \in k[x,y,z,w]$ s.t. $f,\ g$ が同次式かつ $\deg f$=$\deg g$=d) と書ける．この方程式を p とおく．

また $d = 2$ の時 f, g は2次形式なのでそれぞれに対応する対称行列を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{21} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{43} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \tag{1}$$

とする．これから Q と S の共通部分についての考察を行う．今, $Q.S = C + \ell \in \mathrm{Div}Q$ と書ける (この時点では C の素因子に ℓ が含まれる可能性があることに注意する).

3.1　C の定義イデアル

C のイデアルを求めるためにまず次の補題を示す.

Lemma 3.1. $I := \langle p, q\rangle$ に対して, $r := zf + wg \in (I : \langle x, y\rangle) \subseteq k[x,y,z,w]$ が成り立つ.

Proof.

$$rx = zxf + wxg = zp - gzy + wxg = zp + qg \in I$$

であり,

$$ry = zyf + wyg = zyf + pw - wxf = -qf + pw \in I$$

であるので証明された. □

Lemma 3.2. $r(0,0,z,w) = 0$ の時, $Q.S(\ell) \geq 2$ が成り立つ．ここで $Q.S(\ell)$ は $Q.S$ における素因子 ℓ の係数.

Proof. $r(0,0,z,w) = \left(\sum_{i+j=d} a_{ij} z^i w^j\right) z + \left(\sum_{i+j=d} b_{ij} z^i w^j\right) w$ と書くと,

$$r(0,0,z,w) = 0 \Longleftrightarrow a_{d0} = b_{0d} = 0 \text{ かつ } a_{i-1,j} = -b_{i,j-1} (\forall i, j \geq 1)$$

が成り立つ．この時,

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=d} a_{ij} z^i w^j x + \sum_{i+j=d} b_{ij} z^i w^j y &= \sum_{\substack{i+j=d,\\ i,j\geq 1}} (a_{i-1,j} z^{i-1} w^j x + b_{i,j-1} z^i w^{j-1} y) \\ &= \sum_{\substack{i+j=d,\\ i,j\geq 1}} (a_{i-1,j} z^{i-1} w^{j-1})(xw - yz) \end{aligned}$$

となるので,

$$r(0,0,z,w)=0 \Longrightarrow \bar{p} \in \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 \subset k[x,y,z,w]/\langle xw-yz \rangle \Longrightarrow Q.S(\ell) \geq 2$$

となり示せた. □

次の定理から $Q.S$ における ℓ の係数が 1 の時, C の定義方程式系がわかる.

Theorem 3.3. *$J := \langle p,q,r \rangle$ に対して, $Q.S(\ell)=1$ の時, $I = \langle x,y \rangle \cap J \subseteq k[x,y,z,w]$ が成り立つ.*

Proof. ($\subseteq$) は仮定なしで明らかに成り立つ. したがって ($\supseteq$) を示す.
$\forall F \in \langle x,y \rangle \cap J$ に対して $F = pF_1 + qF_2 + rF_3$, $\exists F_i \in k[x,y,z,w]$ と書くと, $pF_1 + qF_2 \in I$ となるので, $rF_3 \in I$ を示せば十分. しかしこれは $rF_3 \in \langle x,y \rangle$ より $r(0,0,z,w) \cdot F_3 \in \langle x,y \rangle$ となるが, その一方 $\langle x,y \rangle$ は素イデアルであるので Lemma 3.2 から $F_3 \in \langle x,y \rangle$ となる. よって, Lemma 3.1 により $rF_3 \in I$ となり証明できる. □

よって C のイデアルを求めることができた. もし C が非特異既約曲線であれば非特異曲面上の種数公式 (Theorem 2.9) と Bezout の定理 (Theorem 2.12) からその幾何学的種数は d^2-d であり次数は $2d+1$ になる.

3.2 種数 2 次数 5 の曲線族の構成

以下, この小節では特に $d=2$ のとき, つまり C が種数 2 次数 5 の曲線となる場合について考察する. p, q, r の係数をパラメーターとする曲線を次のように構成していく. つまり

$$\begin{aligned} p,\ q,\ r \in R &:= k[a_{ij}, b_{kl} | i,j,k,l][x,y,z,w], \\ \mathbb{J} &:= \langle p,q,r \rangle \subset k[a_{ij}, b_{kl} | i,j,k,l][x,y,z,w], \\ &\quad (a_{ij}, b_{kl} \text{を (1) のようにする}). \end{aligned}$$

として考える. また $P = (a_{ij} : b_{kl} | i,j,k,l) \in \mathbb{P}^{19}$ について $\mathbb{J}$ に代入したものを $J(P)$ と書く.

Lemma 3.4. *$\langle \bar{p}, \bar{r} \rangle_{\mathscr{O}_Q} \subseteq \langle a_{ij}, b_{kl} | i,j,k,l \rangle_k \otimes_k \mathscr{O}_Q$, 完全系列*

$$0 \to \langle \bar{p}, \bar{r} \rangle_{\mathscr{O}_Q} \to \langle a_{ij}, b_{kl} | i,j,k,l \rangle_k \otimes_k \mathscr{O}_Q \to E \to 0$$

について, 次が成り立つ.

(1) *$\langle \bar{p}, \bar{r} \rangle_{\mathscr{O}_Q}$ は部分ベクトル束, すなわち $\langle \bar{p}, \bar{r} \rangle_{\mathscr{O}_Q}$ と E は局所自由層.*

(2) $\mathrm{rank}E = 19$.

ただし $\langle \bar{p}, \bar{r}\rangle_{\mathscr{O}_Q}$ は任意の Q のアファイン開集合 U に対して $\bar{p},\ \bar{r}$ は $R \otimes_k \mathscr{O}_U$ の U 上の切断だと自然に思えるのでそこで生成させ全体に張り合わせたもの.

Proof. まず, $D_+(x) \subset Q$ で計算する.

$$\Gamma(D_+(x), \langle \bar{p}, \bar{r}\rangle) = \langle \overline{f(1,y,z,w) + yg(1,y,z,w)}\rangle_{\mathscr{O}_{Q(D_+(x))}}$$

となる. また $P = (1,b,c,d) \in D_+(x)$ に対して,

$$E \otimes k(P) \cong \langle a_{ij}, b_{kl} | i,j,k,l\rangle_k / \langle f(1,b,c,d) + bg(1,b,c,d)\rangle$$

より, $\dim_k E \otimes k(P) = \dim_k E \otimes K(Q) = 19$ となる (ただし $K(Q)$ は Q の関数体). したがって E_Pは rank19 の $\mathscr{O}_{Q,P}$-自由加群.

$$\langle \bar{p}, \bar{r}\rangle_{\mathscr{O}_Q} \otimes K(Q) \cong \langle f(1,b,c,d) + bg(1,b,c,d)\rangle$$

より $\dim_k \langle \bar{p}, \bar{r}\rangle_{\mathscr{O}_Q} \otimes k(P) = \dim_k \langle \bar{p}, \bar{r}\rangle_{\mathscr{O}_Q} \otimes K(Q) = 1$だから$(\langle \bar{p}, \bar{r}\rangle_{\mathscr{O}_Q})_P$はrank1 の $\mathscr{O}_{Q,P}$-自由加群.

同様なことは他のアファイン開集合 $D_+(y),\ D_+(z),\ D_+(w)$ に対しても言えるので証明できる. □

Theorem 3.5. Q 上の射影空間束 $\mathscr{X}_{\mathbb{P}^{19}} := \mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}^{19}_Q$(以降は単に $\mathscr{X}$ と書く) と第 1 射影 $\pi : \mathscr{X} \xrightarrow{surj} \mathbb{P}^{19}_k$ に対して次が成り立つ.

(1) $\forall P = (a_{ij} : b_{kl} | i,j,k,l) \in \mathbb{P}^{19}$ に対して, $\pi^{-1}(P) = \mathrm{Proj}(k[x,y,z,w]/(J(P))$ となる.

(2) $\mathrm{ch}(k) = 0$ の時, 空でない開集合 $U \subseteq \mathbb{P}^{19}$ が $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{smooth} U$ を満たすように存在する.

(3) (2) の下で U の任意の点のファイバーは種数 2 次数 5 の非特異既約曲線.

Proof. (1) 射影空間束の bundle projection を ϕ とすると,

$$\pi^{-1}(P) \cap \phi^{-1}(D_+(x)) = \mathrm{Spec}(k[x,y,z,w]/J(P))_{(x)}$$

となるのでほかのアファイン開集合でも同様なことが成り立つのでそれが張り合って得られるものは $\mathrm{Proj}(k[x,y,z,w]/(J(P))$ である.

(2) $\mathrm{ch}(k) = 0$ かつ $\mathscr{X}$ が非特異なので generic smoothness より自明.

(3) ファイバーを C とする. 仮に C が可約つまり $C = C_1 + C_2$ （$C_1 \neq C_2$ かつ両方 effective）だとすると $C_1,\ C_2$ の因子型と $C_1,\ C_2$ の交点数を見ると $C_1.C_2 \gneq 0$ になっているので交点を持ち可約曲線 C において交点は特異点だが, smooth 射のファイバーは regular スキームとなるので矛盾する. よって C は非特異既約曲線となるので証明された. □

以上より種数2次数5の非特異射影曲線からなる family を構成することができた. 具体的に上の U の点を見つけるにあたり次の命題が非常に役立つ.

Proposition 3.6. $\mathrm{ch}(k) \neq 2$ において $C \subset Q$ が 型 $(3,2)$ の因子の時, Q の第1射影 $\pi_1 : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ に対して,

$$\pi_1 \text{が有限射かつ相異なる6点以上で分岐している.} \Longleftrightarrow C \text{は非特異既約曲線.}$$

が成り立つ. ただし C の特異点の像は分岐点とみなす.

Proof. $\Longleftarrow$ は明らかなので $\Longrightarrow$ を示す.
C がスキームとして integral か integral でないかで場合わけをして考える.

Case1. C が integral の時.
C の正規化を $\tilde{C}$ と書くと Remark 2.5 より $p_a(C) = g(\tilde{C}) + \delta$ が成り立つ (δはSingular defect). 正規化は次数1の射である. したがって正規化と π_1 の合成 $\tilde{\pi_1}$ は2重被覆となる. $p_a(C) = 2$であることから $(g(\tilde{C}), \delta) = (0,2),\ (1,1),\ (2,0)$ となるのでそれぞれについて考えると次のようになる.

(a) $(g(\tilde{C}), \delta) = (0,2)$ の時.
$\tilde{\pi_1}$ に対して Hurwitz の定理 (Theorem 2.11) を使うと $\deg(R_{\tilde{\pi_1}}) = 2$ になる. また特異点は高々2個となる. したがって π_1 の分岐点は高々4点となるので仮定に矛盾する.

(b) $(g(\tilde{C}), \delta) = (1,1)$ の時.
$\tilde{\pi_1}$ に対して Hurwitz の定理 (Theorem 2.11) を使うと $\deg(R_{\tilde{\pi_1}}) = 4$ になる. また特異点はちょうど1個より π_1 の分岐点は5点となる. したがって仮定に矛盾する.

(c) $(g(\tilde{C}), \delta) = (2,0)$ の時.
C は非特異既約曲線になる.

注意としては, 2重被覆を考えているので標数が2でなければ Hurwitz の定理 (Theorem 2.11) を使うことができる.

Case2. C が integral でない時.
仮定の準有限性から因子型の分け方は

$$\begin{aligned}(3,2) &= (3,1) + (0,1)\\ &= (2,1) + (1,1)\end{aligned}$$

しかし π_1 は2重被覆なので $C = D + E$ と書くと π_1 の $D,\ E$ への制限は次数1となる. より $D,\ E$ は既約曲線で π_1 の $D,\ E$ への制限は $\mathbb{P}^1$ への全単射な双有

理射となり $D,\ E$ は非特異既約有理曲線となる.
よって仮定より $D.E \geq 6$ となるが上の因子型の分け方に矛盾する.

以上より C は非特異既約曲線になる. □

Remark 3.7. 上記の π_1 は *projective* 射であるので π_1 が有限射であることと準有限射であることは同値 ([Har], Ⅱ, Exe3.5 & Ⅲ, Exe11.2).

3.3 例

Theorem 3.5, (2) での U の具体的な点の例をみる.

Example 3.8. $\mathrm{ch}(k) \neq 2,\ 3,\ 5,\ f := xz + Ay^2,\ g := Bw^2$ に対し $AB \neq 0$ の時, $\mathrm{Proj}(k[x,y,z,w]/J)$ は非特異既約曲線である. またその曲線の $\mathbb{P}^1$ への 2 重被覆の分岐点は $\infty,\ 1,\ \zeta,\ \zeta^2,\ \zeta^3,\ \zeta^4$ となる (ただし ζ は 1 の原始 5 乗根).

Example 3.9. $\mathrm{ch}(k) \neq 2,\ 3$ の時, $f := Az^2 - Bw^2,\ g := Cx^2 - Dy^2$ において $(A,B),\ (C,D) \neq 0$ とすると, 次が成り立つ.

$\mathrm{Proj}(k[x,y,z,w]/J)$ が非特異既約曲線. $\Longleftrightarrow ABCD \neq 0$ かつ $(A:B) \neq (C:D)$.

またその曲線の $\mathbb{P}^1$ への 2 重被覆の分岐点は

$$\infty,\ 1, \sqrt{B/A},\ -\sqrt{B/A}, \sqrt{C/D},\ -\sqrt{C/D}$$

となる.

Remark 3.10. Example 3.9 より Theorem 3.5 の (2) の標数の仮定は $2, 3$ 以外に弱められる.

Example 3.8 と Example 3.9 はそれぞれ種数 2 の曲線のモジュライ空間への像の次元が 0, 1 となっている. そこで次のような問題を考える.

Question 3.11. 種数 2 のモジュライ空間への自然な双有理同値になるような非特異 2 次曲面 Q 上の種数 2 次数 5 の曲線族は構成できるか.

これに対する直接的な答えではないが次のようなものを見つけた.

Theorem 3.12. $f := Ax^2 + By^2 + Cw^2,\ g : Dz^2 + Bw^2 + 2Ewx,$
$S := \{B^2 - E^2 + BC + AB + AC + AD + BD = 0\} \subset \mathbb{P}^4_k$ すると,
S の Zariski 開集合 $V := U \cap S$ に対して V から種数 2 の曲線のモジュライ空間への自然な *generically* 有限全射が存在する.

Proof. $P=(A,B,C,D,E)\in S$ とする．そして, そのファイバーを $D_+(x)$ 内で考える．$\mathrm{Proj}(k[x,y,z,w]/J(P))\cap D_+(x)$ の座標環は,

$$k[y,z]/\langle A+By^2+Cy^2z^2y(Dz^2+By^2z^2+2Eyz)\rangle$$

となる．さらに,

$$k[y]\longrightarrow k[y,z]/\langle A+By^2+Cy^2z^2y(Dz^2+By^2z^2+2Eyz)\rangle$$

は射影に対応する環射になる．この環射は単射となる．

よって分岐点を調べる．それは $(By^3+Cy^2+Dy)+2Ey^2z+A+By^2=0$ が z について重根をもつところなので, 判別式は

$$(2Ey^2)^2-4(By^3+Cy^2+Dy)(A+By^2)=0$$

となる．これを展開すると,

$$d:=B^2y^5+(BC-E^2)y^4+(BA+BD)y^3+ACy^2+ADy=0$$

になる．したがって仮定の条件から $y=1$ は $d=0$ の根となるので

$$\begin{aligned}
d &= ky(y-1)(y^3+s_1y^2+s_2y-s_3)\\
k &= B^2\\
k(s_1-1) &= BC-E^2\\
k(s_2-s_1) &= BA+BD\\
k(s_3-s_2) &= AC\\
ks_3 &= -AD
\end{aligned}$$

となる．これを整理すると,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{BC-E^2}{B^2}+1\\
s_2 &= \frac{A+D}{B}+\frac{BC-E^2}{B^2}+1\\
s_3 &= \frac{-AD}{B^2}
\end{aligned}$$

になる．任意の s_1 , s_2 , s_3 に対して上を満たす A から E が存在する．これは $y^3+s_1y^2+s_2y-s_3$ を用いて, 任意の k の 3 元についてそれらを根にもつ 3 次方程式を表すことが可能である．

以上より 3 次方程式がそれぞれ 0, 1 と異なり相違なる 3 解 α, β, γ を持つ時, 少なくとも ∞, 0, 1, α, β, γ はこの曲線の分岐点となる．したがって, Proposition 3.6 より曲線は非特異既約曲線となり, 種数 2 になる．この分岐点の考察は粗モジュライ空間の普遍的性質によって得られる V から種数 2 の曲線のモジュライ空間の射が全射であることを示している (Definition 2.13). □

4 2次曲面上の(3,2)型因子の変形に関する考察

前節ではファイバーとして $(3,2)$ 因子のみが現れる曲線族を構成した, ファイバーとして $(2,3)$ 因子のみが現れる曲線族も同様の方法で構成できる. したがって, 次のような問題が考えられる.

Question 4.1. ファイバーとして $(3,2)$ 型の因子と $(2,3)$ 型の因子の両方が現れる曲線族は存在するか (この時点では問題にあいまさがあるが後の Definition 4.14 において厳密に定式化する).

この節ではこの問題を Hilbert スキームを用いて否定的に解決する. そのためにまずは Hilbert スキームに関する定義や定理などを紹介する.

4.1 Hilbert スキームに関する定義と準備

Hilbert スキームの局所的な性質はアルティン環の関手と深い関わりがある. この小節ではその一部を紹介する.

Definition 4.2.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A} &:= \{\text{剰余体を } k \text{ にもつアルティン局所 } k \text{ 代数の圏}\} \\
\hat{\mathscr{A}} &:= \{\text{剰余体を } k \text{ にもつネーター完備局所 } k \text{ 代数の圏}\} \\
\mathscr{A}^* &:= \{\text{剰余体を } k \text{ にもつネーター局所 } k \text{ 代数の圏}\}
\end{aligned}
$$

また $\Lambda \in ob(\mathscr{A}^*)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_\Lambda &:= \{\text{剰余体を } k \text{ にもつアルティン局所}\Lambda\text{代数の圏}\} \\
\hat{\mathscr{A}}_\Lambda &:= \{\text{剰余体を } k \text{ にもつネーター完備局所}\Lambda\text{代数の圏}\} \\
\mathscr{A}^*_\Lambda &:= \{\text{剰余体を } k \text{ にもつネーター局所}\Lambda\text{代数の圏}\}
\end{aligned}
$$

それぞれ射は局所射である.

Definition 4.3. $\Lambda \in ob(\hat{\mathscr{A}})$ に対して, 共変関手

$$F : \mathscr{A}_\Lambda \longrightarrow \{sets\}$$

を**アルティン環の関手**と言う. $R \in ob(\hat{\mathscr{A}})$ に対して

$$h_{R/\Lambda}(\cdot) := \mathrm{Hom}_{\hat{\mathscr{A}}_\Lambda}(R, \cdot)$$

はアルティン環の関手となる.

また F がある R の $h_{R/\Lambda}$ と同型の時, F は**プロ表現可能**であると言う.

Definition 4.4. $k[\varepsilon] := k[t]/(t^2)$ を *dual number ring* と呼ぶ.

アルティン環の関手 F にたいして $F(k[\varepsilon])$ が k ベクトル空間の構造をもつ時, $F(k[\varepsilon])$ を F の**接空間**をいい t_F と書く.

また F に対して k ベクトル空間 o_F が

$$\forall A \in ob(A_\Lambda),\ \forall \xi \in F(A),\ \exists \varphi \in \mathrm{Hom}_k(E_\Lambda(A,k), o_F)$$
$$s.t.\ \mathrm{Ker}\varphi = \{(S,e) \in \mathrm{Hom}_k(E_\Lambda(A,k), o_F) | \xi \in \mathrm{Im}F(e)\}$$

という性質を持つ時, o_F を F の**障害空間**と言う. F が障害空間として (0) をもつとき, F は *unobstructed* と言う (ただし $E_\Lambda(A,k)$ は A の k による Λ 拡大の同型類の集合).

Proposition 4.5. F が $R \in ob(\hat{\mathscr{A}})$ によってプロ表現可能で o_F がその障害空間とするとき, 次が成り立つ.

$$\dim_k o_F < \infty. \ \Rightarrow\ \dim_k t_F \geq \dim R \geq \dim_k t_F - \dim_k o_F.$$

ただし $\dim R$ は R の Krull 次元.

Proof. [Ser] の (2.2.11.) 参照. □

Definition 4.6. 代数的スキーム Y とその閉部分スキームを X とする. 連結スキーム S と部分閉スキーム $\mathscr{X} \subseteq Y \times S$ が次を満たすとき, Y における X の S 上での**変形族**と言う. ただし $\pi : \mathscr{X} \longrightarrow S$ は第 2 射影.

(1) $\pi : \mathscr{X} \longrightarrow S$ が 平坦射.

(2) ある k 有理点 $x \in S$ が $\pi^{-1}(x) = X$ となるように存在する.

Definition 4.7. 代数的スキーム Y とその閉部分スキームを X とする. 任意の $A \in ob(\mathscr{A})$ に対して,

$$H_X^Y(A) := \{Y \text{ における } X \text{ の } \mathrm{Spec}A \text{ 上での変形族.}\}$$

によりアルティン環の関手

$$H_X^Y : \mathscr{A} \longrightarrow \{set\}$$

を定める. これを Y における X の**局所 Hilbert 関手**と呼ぶ.

Definition 4.8. Noether スキーム Y とその閉部分スキーム X に対して $\mathscr{I}_{Y/X}$ を Y に対応する X 上のイデアル層とする. Y において X が**正則埋め込み**であるとは任意の $P \in Y$ に対して局所環 $\mathscr{O}_{Y,P}$ 内で $(\mathscr{I}_{Y/X})_P$ が正則列の一部で生成されることである. 特に X, Y がともに *regular* の時その埋め込みは正則.

Proposition 4.9. 代数的スキーム Y とその閉部分スキーム X に対して次が成り立つ.

(1) 自然な同型 $H_X^Y(k[\varepsilon]) \simeq H^0(X, \mathscr{N}_{X/Y})$ が存在する. ただし $\mathscr{N}_{X/Y}$は Y における X 上の法束.

(2) $h^0(X, \mathscr{N}_{X/Y}) < \infty$ の時, H_X^Y はプロ表現可能.

(3) X が Y における正則埋め込みかつ射影的である時, $H^1(X, \mathscr{N}_{X/Y})$ は H_X^Y の障害空間となる.

Proof. [Ser] の (3.2.1.), (3.2.2.), (3.2.6.) 参照. □

Definition 4.10. 次のような多項式 $P(t)$ を**整数値多項式**と呼ぶ.

$$P(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i \binom{t+N}{i}, \quad (a_i \in \mathbb{Z}).$$

Definition 4.11. 射影空間 $\mathbb{P}^N$ とその閉部分スキームを Y とする. 次数 N 以下の整数値多項式 $P(t)$ に対して,
反変関手

$$Hilb_{P(t)}^Y : \{schemes/k\} \longrightarrow \{sets\}$$

を次のように定義する. また, これを Y における $P(t)$ の **Hilbert 関手**と呼ぶ.

$$Hilb_{P(t)}^Y(S) := \{\mathscr{X} \subseteq Y \times S;\ S \text{ 上の平坦族で Hilbert 多項式を } P(t) \text{ で持つもの}\}.$$

Proposition 4.12. $Hilb_{P(t)}^Y$ は k スキームの圏で表現可能関手. *i.e.*

$$\exists \mathscr{H}\ \ s.t.\ Hilb_{P(t)}^Y(\cdot) \cong Mor_{sch}(\cdot, \mathscr{H}).$$

さらに上の性質を満たす $\mathscr{H}$ は同型を除いて一意的で射影スキームになる. この $\mathscr{H}$ を Y における $P(t)$ の **Hilbert スキーム**と呼び, $\mathscr{H}_{P(t)}^Y$ と書く.

Proof. [Ser] の (4.3.3.) 参照.

□

Proposition 4.13. 射影スキーム Y と整数値多項式 $P(t)$ において, その Hilbert スキームを $\mathscr{H}_{P(t)}^Y$ とする. k 有理点 $[X] \in \mathscr{H}_{P(t)}^Y$ に対して, Y における X の局所 Hilbert 関手 H_X^Y は完備局所環 $\hat{\mathscr{O}}_{\mathscr{H}_{P(t)}^Y, [X]}$ によってプロ表現可能である. すなわち $H_X^Y \simeq \mathrm{Hom}(\hat{\mathscr{O}}_{\mathscr{H}_{P(t)}^Y, [X]}, \cdot\ )$

Definition 4.14. $\mathbb{P}^N$ とその閉部分スキームを Z とする．Z の閉部分スキーム X, Y に対して, X が Y に Z 内で**変形可能**であるとは, 次のような連結代数的スキーム S と閉部分スキーム $\mathscr{X} \subseteq Z \times S$ が存在することを言う．ただし $\pi : \mathscr{X} \longrightarrow S$ は第 2 射影.

(1) $\pi : \mathscr{X} \longrightarrow S$ は平坦射かつ全射.

(2) ある k 有理点 $x, y \in S$ が $\pi^{-1}(x) = X$ かつ $\pi^{-1}(y) = Y$ を満たすように存在する.

この Definition 4.14 を用いて Question 4.1 を厳密に述べる.

Question 4.15. Q 上の $(3,2)$ 型因子 C は $(2,3)$ 型因子 D に Q 内で変形可能であるか.

4.2 $\mathscr{H}^Q_{5t+3}$ の構造

この小節では Question 4.15 を Hilbert スキームの位相的構造を調べることにより否定的に解決する.

Proposition 4.16. 任意の k 有理点 $[C] \in \mathscr{H}^Q_{5t+3}$ に対して C は因子でその型は $(3,2)$ もしくは $(2,3)$ になる.

Proof. $\bar{C}$ を C の閉部分スキームで Cohen-Macaulay かつ equidimentional のもので最大なものとする.
$\deg\bar{C}=5$ より, $\bar{C}$ の因子型は $(3,2)$, $(2,3)$, $(1,4)$, $(4,1)$, $(5,0)$, $(0,5)$ のどれかになる. さらにそれぞれの算術的種数は 2, 2, 0, 0, -4, -4 となる．閉埋め込み $i : \bar{C} \hookrightarrow C$ に対して次の完全系列が得られる.

$$0 \to K \to \mathscr{O}_C \to i_*\mathscr{O}_{\bar{C}} \to 0$$

K は摩天楼層であることから $H^1(C, K) = 0$ となるので,

$$p_a(C) = p_a(\bar{C}) - h^0(C, K))$$

となる．$p_a(C) = 2$ より, $K = 0$ がわかる．したがって $\bar{C} = C$ となる.

後半は算術的種数 2 次数 5 の因子型は非特異曲面上の種数公式 (Theorem 2.9) と Bezout の定理 (Theorem 2.12) により $(3,2)$ もしくは $(2,3)$ 型になるので証明された. □

Definition 4.17. V を有限次元ベクトル空間として, スカラー倍を同一視する同値関係 $\sim$ とする.

$$\mathbb{P}_*(V) := (V \setminus 0)/\sim$$

を V の**射影化**と呼ぶ.

Theorem 4.18. $\mathscr{H}^Q_{5t+3}$ の連結成分による分解は次のようになる.
$\mathscr{H}^Q_{5t+3} = W_1 \cup W_2$ $s.t.$

(1) W_1, W_2は 連結かつ有理的.

(2) $\dim W_1 = \dim W_2 = 11$.

(3) 任意の k 有理点 $[C] \in W_1$に対して C は $(3,2)$ 因子.

(4) 任意の k 有理点 $[D] \in W_2$に対して D は $(2,3)$ 因子.

Proof. Q 上の ℓ のイデアル層を $\mathscr{I}_{\ell/Q}$ と書く.

$$\mathscr{X}' := \{(p,x) | p(x) = 0\} \subset \mathbb{P}_*(H^0(Q, \mathscr{I}_{\ell/Q}(3))) \times Q$$

について, $\mathscr{I}_{\ell/Q}(3) = \mathscr{O}_Q(3,2)$ は globally generated だから,

$$\mathscr{X}' = \mathbb{P}([\ker(H^0(Q, \mathscr{I}_{\ell/Q}(3)) \otimes \mathscr{O}_Q \twoheadrightarrow \mathscr{I}_{\ell/Q}(3))]^\vee)$$

と同一視できる. したがって $\mathscr{X}'$ は射影多様体となる.

$\mathscr{X}$ を $\mathscr{X}' \setminus (\mathbb{P}_*(H^0(Q, \mathscr{I}_{\ell/Q}(3)) \times \ell)$ の $\mathbb{P}_*(H^0(Q, \mathscr{I}_{\ell/Q}(3))) \times Q$ 内での Zariski 閉包と定めると, 第 1 射影 $\pi : \mathscr{X} \longrightarrow \mathbb{P}_*(H^0(Q, \mathscr{I}_{\ell/Q}(3)))$ は,

$$3 \text{ 次曲面 } S \in \mathbb{P}_*(H^0(Q, \mathscr{I}_{\ell/Q}(3))) \text{ に対して} \pi^{-1}(S) = S \cap Q - \ell$$

を満たす. この $(\mathscr{X}, \mathbb{P}_*(H^0(Q, \mathscr{I}_{\ell/Q}(3))))$ について次の 2 つの Claim が成り立つことを示す.

Claim 1. π のファイバーには全ての $(3,2)$ 型の因子が現われる.

Claim 2. 異なる点のファイバーには Q 上の異なる $(3,2)$ 型の因子が与えられる.

Claim 1. は π のファイバーには全ての $(3,2)$ 型の因子が現われるのは任意の $(3,2)$ 因子 D に対して $D + \ell$ を含む 3 次曲面が存在することを言えば十分. しかし, それは $\mathscr{I}_{D+\ell/Q}(3) \simeq \mathscr{O}_Q(-3,-3)(3) \simeq \mathscr{O}_Q$ より $h^0(Q, \mathscr{I}_{D+\ell/Q}(3)) = 1$ となるので言える. また $h^0(Q, \mathscr{I}_{D+\ell/Q}(3)) = 1$ となることは Claim 2. が成り立つことを示している.

したがって Hilbert スキームの普遍的性質から得られる射

$$\mathbb{P}_*(H^0(Q, \mathscr{I}_{\ell/Q}(3)) \longrightarrow \mathscr{H}^Q_{5t+3}$$

は単射であり, かつ $\mathscr{H}^Q_{5t+3}$ 内にある $(3,2)$ 型因子に対応する点のこの射におけるファイバーは空でないことがわかる.

また $(3,2)$ 因子かつ非特異既約曲線 C をとってくると C の局所 Hilbert 関手の障害空間は法束 $\mathscr{N}_{C/Q}$ の 1 次元コホモロジー群と同型になる (Proposition 4.9). $\mathscr{N}_{C/Q}$ の次数は $\mathscr{N}_{C/Q} \simeq \mathscr{O}_Q(C)|_C$ より,

$$\deg(\omega_C \otimes (\mathscr{N}_{C/Q})^{\vee}) = 2 - 12 = -10$$

となる. したがって Serre の双対定理より,

$$h^1(C, \mathscr{N}_{C/Q}) = h^0(C, \omega_C \otimes (\mathscr{N}_{C/Q})^{\vee}) = 0$$

となる. したがって障害空間が消えてることがわかるので $\mathscr{H}^Q_{5t+3}$ は $[C]$ で非特異 (Proposition 4.5). また $(2,3)$ 型の因子に対しても同様のことが言えるので, 以上をふまえると Proposition 4.16 より (2) 以外は言えた.

$\mathscr{I}_{\ell/Q}(3) = \mathscr{O}_Q(3,2)$ が成り立つ. だから Kunneth の公式より

$$H^0(Q, \mathscr{O}_Q(3,2)) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(3)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$$

となる. したがって $h^0(Q, \mathscr{O}_Q(3,2)) = 4 \times 3 = 12$ となり (2) がわかる. □

Remark 4.19. *Q 上の $(3,2)$ 因子かつ非特異既約曲線 C に対して, $[C] \in \mathscr{H}^Q_{5t+3}$ の Zariski 接空間が法束 $\mathscr{N}_{C/Q}$ の大域切断のなすベクトル空間と同型である (Proposition 4.9). したがって Riemann-Roch の公式 (Theorem2.7) を適用することでも (2) は証明できる.*

Corollary 4.20. $(3,2)$ 型因子は $(2,3)$ 型因子に Q 上で変形できない.

Proof. 変形できると仮定すると, Definition 4.14 のような $(\mathscr{X}, S)$ が存在する. Hilbert スキームの普遍的性質より射

$$\phi\colon\ S \longrightarrow \mathscr{H}^Q_{5t+3}$$

が得られる. その像 $\phi(S)$ は Theorem 4.18 の W_1 と W_2 の両方と交わりをもつ. よって $\phi(S)$ は不連結となり S が連結であることに矛盾する. □

謝辞

この卒業論文を書くにあたり, 内容などでの有益なご指導していただいた指導教員である椙元先生と論文の構成などの助言をしていただいた網谷泰治氏をはじめとする研究室の先輩の方々にこの場を借りて心から御礼申し上げます.

参考文献

[A-M] M.F.Atiyah, I.G.Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company.

[Bea] A.Beauville. *Complex Algebraic Surfaces Second Edition.* London Mathematical Society Student Texts, 34.

[H-M] J.Harris, I.Morrison. *Moduli of Curves.* Springer Verlag, 187.

[Har] R.Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 52.

[Ser] E.Sernesi. *Deformations of Algebraic Schemes.* Grundlehren der mathmatischen Wissenschaften, 334.