葉層構造のFatou集合について

足助 太郎　(東京大学大学院数理科学研究科)*

ここでは境界のない多様体上の，横断的に複素解析的な葉層構造で複素余次元が1であるものを考える．例えば複素曲面上の複素解析的なベクトル場の積分曲線により定まるような葉層構造のように，特異点を持つ場合も考える．葉層構造$\mathcal{F}$の特異点集合を$\mathrm{Sing}\,\mathcal{F}$で表すことにする．

Fatou集合は古典的には$\mathbb{C}P^1$上の複素力学系（写像度が2以上の有理写像や，超越整函数，さらにはそれらのなす半群の力学系），あるいはKlein群の作用に関して（Sullivanの辞書を通じて不連続領域として）定まる．複素余次元1の葉層構造のFatou集合もこれらに対応する．大雑把にはこれらは次のように定まる．

定義 1 ([1]，[2])**.** Mを境界のない多様体とし，$\mathcal{F}$を複素余次元1の，Mの葉層構造とする．$p \in M \setminus \mathrm{Sing}\,\mathcal{F}$を始点とし，$p$を通る葉に沿った$\mathcal{F}$のホロノミーを考える．これらが正規族をなす時，$p$は$\mathcal{F}$の**Fatou集合**$F(\mathcal{F})$に属するとする．また，$J(\mathcal{F}) = M \setminus F(\mathcal{F})$と置き，$\mathcal{F}$の**Julia集合**と呼ぶ．

定義により$\mathrm{Sing}\,\mathcal{F} \subset J(\mathcal{F})$が成り立つ．

力学系のFatou–Julia分解，Klein群の作用の不連続領域–極限集合分解，葉層構造のFatou–Julia分解は擬群や擬半群の作用として統一的に理解できる[2]．また，複素余次元1の葉層構造のJulia集合は，実余次元1葉層の極小集合と類似した性質を持つことが知られている[1]．そのため，Fatou集合，Julia集合を決定することは葉層構造においても重要な問題であると考えられる．しかし，力学系やKlein群の作用の場合と同様に，葉層構造についても与えられた点がFatou集合あるいはJulia集合に属するか判別するのは一般には極めて困難である．ここでは，Fatou集合は葉層の葉の和集合であることと，葉層のホロノミーに関して不変な計量を持つ[1],[2]ことに着目し，一つの判定条件を紹介したい．まず，次のように定める．

定義 2 ([3])**.** Uを$M \setminus \mathrm{Sing}\,\mathcal{F}$の開集合とする．$U$の閉部分多様体の族$\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$が$U$の**コンパクト近似**であるとは，次が成り立つことを言う．

1) 各nについて，K_nはK_{n+1}の内部に含まれる．また，K_nはUの真部分集合である．
2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = U$が成り立つ．
3) $\mathcal{F}$のK_nへの制限を$\mathcal{F}_n$とすると，$\mathcal{F}_n$のホロノミー擬群はコンパクト生成である．

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 37F75; Secondary 57R30, 32S65
キーワード：foliations, Fatou sets

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場3–8–1　東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: asuke@ms.u-tokyo.ac.jp

正確には K_n にはもう少し技術的な条件が付く．また，条件3) は，$\mathcal{F}_n$ をコンパクトな多様体（境界はあってもなくても良い）の葉層構造と見なして良い，という意味である．K_n たちがコンパクトであれば条件3) は満たされるが，それよりやや弱い仮定である．

定義 3. g を TM のリーマン計量とする．$M \setminus \operatorname{Sing}\mathcal{F}$ 上の，横断的なエルミート計量 h が g に関して**下に有界**であるとは $v \in TM/T\mathcal{F}$ について $h(v,v) \geq g(v,v)$ が成り立つことを言う．

ここで，$TM/T\mathcal{F}$ は階数 1 の複素ベクトル束と考えている．また，$g(v,v)$ は例えば $(TM/T\mathcal{F}) \otimes \mathbb{C}$ を考えることにより定める．すると，次が成り立つ．

定理 4 ([3])**.** M を境界のない多様体（開多様体でも良い）とし，$\mathcal{F}$ を M の複素余次元 1 の葉層構造とする．また，$TM/T\mathcal{F}$ の計量 g を任意に固定する．また，$U \subset M \setminus \operatorname{Sing}\mathcal{F}$ を，$\mathcal{F}$ の葉の和集合であるような開集合とする．次が成り立つとする．

1) $\mathcal{F}$ の U への制限は横断的な不変エルミート計量で，g に関して下に有界なものを持つ．
2) U のコンパクト近似が存在する．

このとき $U \subset F(\mathcal{F})$ が成り立つ．

定理 4 の条件 1)，2) は閉多様体上の非特異な複素余次元 1 葉層についてはほぼ必要条件である（極端に簡単な葉層構造を除けば必要条件である）と考えられる [2, Proposition 4.24]．一方，一般の状況ではこれらが必要条件であるかは今のところよく分からないが，条件 1)，2) のいずれを外しても反例が存在する．

参考文献

[1] T. Asuke, A Fatou–Julia decomposition of transversally holomorphic foliations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **60** (2010), 1057–1104.

[2] T. Asuke, On Fatou–Julia decompositions, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **22** (2013), 155–195.

[3] T. Asuke, On Fatou and Julia sets of foliations, arXiv:1809.06767 [math.DS], to appear in Jour. Math. Soc. Japan.